



SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

IUT • Licence

ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

Analyse et synthèse des circuits

2^e édition

Tahar Neffati

DUNOD



ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

Analyse et synthèse
des circuits

Consultez nos parutions sur dunod.com

Dunod Editeur, édition de livres, Microsoft Press, ETSF, Ediscience, InterEditions

http://www.dunod.com/

Recherche OK Collections Index thématique

Édiscience
ETSF
InterEditions
Microsoft Press

Donnez un nouveau souffle à votre vie

Santé - Feng Shui Bien-être

Mon compte

Accueil Contacts Sciences et Techniques Informatique Gestion et Management Sciences Humaines Acheter Mon panier

Interviews

 **Réinventer les RH : urgence !**
Gilles Verrier

 **Ramses 2008 : exigez la nouvelle formule !**
Thierry de Montbrial

→ toutes les interviews

Club Enseignants
→ Inscrivez-vous !

Événements

Découvrez le [vidéoBlog Profession dirigeant](#)

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le [NOUVEAU SITE intereditions.com !](#)

les librairies

- Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés -

 **Bacchus 2008**
Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole
Jean-Pierre Couderc, Hervé Hannin, François d'Hauteville, Etienne Montaigne

 **Profession dirigeant**
De la conception du changement à l'action
Gérard Roth, Michal Kurtyka

 **PYTHON**
Petit guide à l'usage du développeur agile
Tarek Ziadé

 **150 petites expériences de psychologie du sport**
pour mieux comprendre les champions... et les autres
Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek

LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS

→ Bibliothèque du DSI
→ Gestion industrielle
→ Métiers de la vigne et du vin
→ Marketing et Communication
→ Directeur d'établissement social et médico-social
→ Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

→ Action sociale
→ Psychologie
→ Développement personnel et Bien-être
→ Entreprise
→ Expertise comptable
→ Informatique et NTIC
→ Industrie
→ Toutes les newsletters

bibliothèques des métiers newsletters Microsoft®Press ediscience.net expert-sup.com

Notice légale

ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

Analyse et synthèse des circuits

Cours et exercices corrigés

Tahar Neffati

Maître de conférences à l'IUT
de Cergy-Pontoise et au CNAM

2^e édition

DUNOD

Electricité générale – Analyse et synthèse des circuits,
Dunod, 2003.

Electronique de A à Z,
Dunod, 2004.

Introduction à l'électronique analogique,
Dunod, 2008.

Traitement du signal analogique,
Ellipses, 1999.

Exercices et problèmes résolus de traitement du signal analogique,
Ellipses, 2004.

Illustration de couverture : *Fotolia*, © *Attila Toro*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--



© Dunod, Paris, 2003, 2008
ISBN 978-2-10-053960-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

CHAPITRE 1 • NOTIONS DE BASE SUR LES CIRCUITS	1
1.1 Grandeurs électriques	1
1.2 Formes d'ondes et signaux électriques	5
1.3 Relation tension-courant	18
EXERCICES	30
CHAPITRE 2 • LES RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME STATIQUE	44
2.1 Définitions	44
2.2 Lois de Kirchhoff	47
2.3 Associations de dipôles	49
2.4 Principaux théorèmes	52
2.5 Méthodes d'analyse	61
2.6 Puissance et énergie	72
EXERCICES	76
CHAPITRE 3 • ANALYSE HARMONIQUE	100
3.1 Représentation d'un signal sinusoïdal	100
3.2 Généralisation de la loi d'Ohm	107
3.3 Puissance et énergie en régime sinusoïdal	116
3.4 Systèmes triphasés	127
EXERCICES	133

CHAPITRE 4 • QUADRIPOLES ÉLECTRIQUES ET FONCTIONS DE TRANSFERT	152
4.1 Définitions	152
4.2 Représentation matricielle	153
4.3 Association de quadripôles	158
4.4 Quadripôles en charge	161
4.5 Fonction de transfert	166
EXERCICES	179
CHAPITRE 5 • LES RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME QUELCONQUE	199
5.1 Résolution des équations différentielles	199
5.2 Utilisation de la transformation de Laplace	209
5.3 Transformation inverse	214
5.4 Méthodes de calcul	218
EXERCICES	232
CHAPITRE 6 • CIRCUITS À TRANSISTORS ET À AMPLIFICATEURS OPÉRATIONNELS	247
6.1 Les transistors bipolaires	247
6.2 Les transistors à effet de champ	252
6.3 Circuits à transistors	254
6.4 L'amplificateur opérationnel	261
6.5 Applications de l'amplificateur opérationnel	267
6.6 Contre réaction appliquée à l'amplificateur opérationnel	275
EXERCICES	279
INDEX	307

Chapitre 1

Notions de base sur les circuits

1.1 GRANDEURS ÉLECTRIQUES

1.1.1 Introduction

L'électricité est une forme d'énergie produite par la circulation de charges électriques dans un corps conducteur ou semi-conducteur. Certains corps, en particulier les métaux (aluminium, cuivre...) sont de très bons conducteurs parce qu'ils possèdent des électrons qui peuvent se libérer de l'attraction du noyau de l'atome pour participer à la conduction électrique. Dans d'autres matériaux appelés isolants, les charges électriques ne peuvent pas circuler.

L'étude du mouvement de ces charges électriques et des phénomènes qui s'y rattachent est l'*électrocinétique*. En réalité, la mise en mouvement des charges dans un conducteur n'est pas instantanée. Le champ électromagnétique se propage le long du conducteur à une vitesse proche de la vitesse de la lumière qui est : $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (mètres par seconde).

Nous allons dans la suite de ce paragraphe rappeler les définitions de l'électrocinétique.

Prenons par exemple le cas d'une batterie de voiture de 12 volts : cette batterie qui est appelée *générateur de tension ou source de tension* a pour rôle de fournir l'énergie sous forme d'un courant électrique. Une ampoule branchée directement aux bornes de la batterie reçoit le courant c'est pourquoi l'ampoule est appelée un *récepteur*. Le

passage du courant électrique chauffe le filament de l'ampoule qui devient incandescent et produit une lumière. D'une façon générale, un récepteur est un appareil qui transforme l'énergie électrique en diverses énergies.

Le rôle du générateur consiste non pas à fabriquer des charges, mais à mettre en mouvement simultanément les charges mobiles situées dans les matériaux conducteurs du circuit électrique. C'est cette circulation des charges électriques dans les conducteurs que nous appelons le courant électrique.

1.1.2 Charge électrique et courant électrique

La charge élémentaire « $-q$ » est celle de l'électron. Il s'agit d'une charge négative exprimée en coulomb (C) et qui vaut : $-q = -1,60 \times 10^{-19}$ C. Les charges en mouvement peuvent aussi être positives (ions positifs), mais pour les conducteurs, ce sont souvent les électrons qui contribuent majoritairement à la conduction électrique.

Supposons maintenant un conducteur de section dS : (par exemple $dS = 1 \text{ cm}^2$), qui contient des porteurs de charges mobiles. Les collisions que subissent ces porteurs de charges sur les imperfections du réseau cristallin du conducteur, leur communiquent un mouvement désordonné dont la résultante du point de vue de transport de l'électricité, est nulle.

La batterie de l'exemple précédent est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\vec{E}$ qui permet le déplacement des charges électriques avec une vitesse proportionnelle à $\vec{E}$. Cette vitesse notée $\vec{v}$ est égale à :

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E} \quad (\mu \text{ représente la mobilité des charges exprimée en } \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$$

En un intervalle de temps égal à 1 seconde, un certain nombre de charges « N » traversent la surface considérée « $d\vec{S}$ ».

$$N = \vec{v} \cdot n \cdot d\vec{S} \cdot dt = \vec{v} \cdot n \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ s}$$

n étant la densité des charges ; c'est-à-dire le nombre de porteurs par unité de volume. La charge électrique qui traverse la section en 1 seconde devient :

$$dQ = qN = q \cdot \vec{v} \cdot n \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

Le flux d'électrons qui circule dans le conducteur est appelé courant électrique I . Son intensité s'exprime en ampère (A).

$$I = \frac{dQ}{dt} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Généralement, « dQ » représente la quantité de charges (en coulomb) traversant la section « $d\vec{S}$ » pendant l'intervalle de temps « dt » (en seconde).

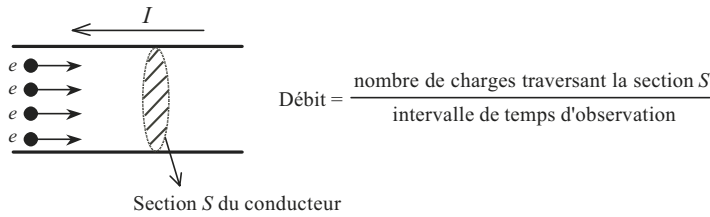


Figure 1.1 Déplacement des charges négatives et sens du courant dans un conducteur.

$\vec{J}$ représente le vecteur densité de courant exprimé en A.m^{-2} . La densité du courant est liée à la vitesse « $\vec{v}$ » d'ensemble des porteurs de charges mobiles, et à leur densité volumique de charges locale « ρ_v ».

$$\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v} \text{ exprimé en } \text{A.m}^{-2}$$

En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons :

$$\vec{J} = \rho_v \cdot \mu \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}$$

σ représente la conductivité électrique du conducteur, exprimée en siemens par mètre (S.m^{-1}). Cette expression représente la forme locale de la loi d'Ohm. Nous utilisons aussi couramment l'inverse de la conductivité qui est appelée la résistivité du conducteur.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \text{ exprimé en ohm.m } (\Omega.\text{m})$$

Dans le cas particulier d'un conducteur cylindrique à section constante « S », nous pouvons déterminer la résistance R ou la conductance G d'un tronçon du conducteur de longueur ℓ :

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{S} \text{ exprimée en ohm et } G = \sigma \cdot \frac{S}{\ell} \text{ exprimée en siemens ou } \Omega^{-1}$$

Par convention, les physiciens du XIX^e siècle, ignorant alors l'existence des électrons, ont défini le courant électrique comme une circulation de charges positives se déplaçant dans le circuit de la borne positive « + » du générateur vers la borne négative « - » de ce dernier.

Cette convention a été maintenue bien que nous sachions aujourd'hui que, dans la plupart des cas, ce sont des électrons qui circulent en sens inverse. Nous retenons :

- le sens du courant est identique au sens du déplacement des ions positifs (trous),
- le sens du courant est opposé au sens du déplacement des électrons.

Comme nous allons le voir au troisième paragraphe, nous trouvons dans les réseaux linéaires l'élément résistance (résistor) dont la valeur exprime la résistance que le composant oppose à la circulation des charges électriques.

La résistance, notée souvent « R », transforme ainsi l'énergie électrique reçue en énergie thermique par dégagement de chaleur. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Joule*.

1.1.3 Potentiel électrique

Comme dans tous les domaines de la physique, le déplacement d'un objet quelconque (une bille, des molécules d'eau, de l'air...) est dû à un apport d'énergie caractérisé par le travail. L'unité du travail (ou énergie) est le joule. Souvent, pour mieux expliquer les phénomènes électriques, nous avons recours à des analogies hydrauliques. Par exemple, l'intensité du courant est comparée à un débit d'eau, la section du conducteur correspondant à la section du tuyau.

En électricité, le générateur joue le rôle d'une pompe où l'eau est remplacée par des charges électriques. La différence d'état électrique (équivalent de la pression) est appelée *différence de potentiel* ou *tension électrique*. Nous pouvons aussi comparer le déplacement d'une charge électrique au déplacement d'une masse entre un niveau haut et un niveau plus bas, ce qui constitue la chute de la masse.

Dans tous les cas, nous avons affaire à un travail qui peut être exprimé par :

$$W = Q (U_A - U_B) = Q \cdot U \quad \text{en joule (J)}$$

La quantité $U = U_A - U_B$ est appelée la différence entre le potentiel du point A et le potentiel du point B, nous parlons alors d'une différence de potentiel exprimée en « volt ». Cette différence de potentiel est définie comme étant le travail par unité de charge. Elle établit une comparaison entre deux points d'un circuit. La tension est symbolisée par la lettre U (ou V) et par une flèche sur le circuit tournée vers le point dont le potentiel est le plus élevé : c'est-à-dire la borne positive du générateur de l'exemple donné à la figure 1.2 qui représente une batterie (pile) du type 12 volts branchée aux bornes d'une ampoule ou d'une résistance.

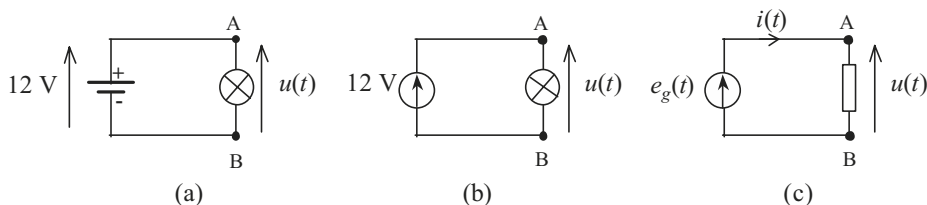


Figure 1.2 Représentation d'un générateur (12 V) et d'un récepteur constitué, soit d'une ampoule électrique (a) et (b), soit d'une résistance (c).

1.1.4 Énergie et puissance électrique

Dans un conducteur, les porteurs de charges soumis à un champ électrique se trouvent en mouvement, ce qui leur procure une certaine énergie cinétique. Ils cèdent cette

énergie au cours de collisions multiples qu'ils subissent durant leur trajet. Le conducteur s'échauffe et nous parlons dans ce cas d'échauffement par *effet Joule*. L'échauffement traduit la quantité d'énergie dissipée par le conducteur.

Soit $u(t)$ la différence de potentiel entre le point A et le point B à un instant déterminé et soit $i(t)$ le courant qui circule entre A et B au même instant. Nous parlons dans ce cas de grandeurs électriques instantanées. La puissance instantanée est :

$$p(t) = u(t).i(t) \quad \text{exprimée en watt (W)}$$

Cette puissance représente le taux (en joule par seconde) selon lequel l'énergie est transférée. Il est donc possible de déterminer, pendant l'intervalle de temps considéré « Δt », la quantité d'énergie dissipée.

$$W = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = \int_0^{\Delta t} u(t).i(t) dt \quad (\text{en J})$$



Remarque : Ne pas confondre l'unité de la puissance qui est le watt, notée « W » et l'énergie ou travail qui est souvent désigné en physique par la lettre « W ».

Souvent, l'évolution temporelle de la valeur de la tension $u(t)$ et de la valeur du courant $i(t)$ en fonction du temps n'est pas constante, mais elle est décrite par une expression mathématique connue $f(t)$. La connaissance de l'énergie dissipée pendant l'intervalle du temps Δt permet de calculer la puissance moyenne.

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} p(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t).i(t) dt \quad (\text{en watt})$$

En toute rigueur, la moyenne temporelle d'un signal électrique est une caractéristique propre qui doit être calculée sur toute l'existence de ce signal, en prenant un intervalle de temps infini. En pratique, nous nous contentons d'une estimation en prenant un intervalle de temps Δt déterminé.

1.2 FORMES D'ONDES ET SIGNAUX ÉLECTRIQUES

D'une manière générale, un circuit électrique linéaire peut être décrit par les éléments passifs (résistances, condensateurs et inductances) qui le constituent, et par les générateurs de tension et de courant qui l'alimentent.

Pour ces générateurs, nous pouvons distinguer les sources continues et les sources alternatives, sinusoïdales ou non.

► Le régime statique ou régime continu

Les grandeurs électriques sont invariantes dans le temps. Nous disons que les tensions et les courants sont continus. Le régime statique peut être utilisé seul dans des cas simples, mais ce régime constitue souvent une première étape pour étudier des systèmes plus complexes comme par exemple les amplificateurs.

► Le régime dynamique ou régime variable

Les grandeurs électriques évoluent dans le temps selon une loi de variation temporelle bien déterminée. Nous pouvons appliquer directement ce régime à des éléments passifs ou sur un schéma équivalent du circuit, auquel cas le modèle n'est valable que pour un régime statique particulier (point de fonctionnement déterminé).

1.2.1 Tensions et courants continus

Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés dipôle électrique. Nous pouvons choisir d'avance soit la convention récepteur, soit la convention générateur :

- convention récepteur : les flèches du courant et de la tension sont en sens inverse ;
- convention générateur : les flèches du courant et de la tension sont dans le même sens.



Figure 1.3 Convention générateur (a) et convention récepteur (b).

Il est commode d'utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature connue ou présumée du dipôle. Mais il arrive souvent qu'après avoir fini le calcul, l'une ou l'autre des quantités déterminées soit négative. Nous pouvons alors nous référer au tableau suivant :

Tableau 1.1 Tableau récapitulatif des conventions.

U	+	−	+	−
I	+	+	−	−
Convention récepteur	Le dipôle réel est un récepteur $v > 0$	Le dipôle réel est un générateur $v < 0$	Le dipôle réel est un générateur $v < 0$	Le dipôle réel est un récepteur $v > 0$
Convention générateur	Le dipôle réel est un générateur $v > 0$	Le dipôle réel est un récepteur $v < 0$	Le dipôle réel est un récepteur $v < 0$	Le dipôle réel est un générateur $v > 0$

a) Source idéale de tension

Un générateur (source) de tension continue supposé idéal est un générateur qui fournit, entre ses bornes, une différence de potentiel constante, quelle que soit l'intensité du courant qui le traverse, ou en d'autres termes quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas nulle.

Nous appelons aussi la source de tension idéale, une force électromotrice U désignée par l'abréviation « f.é.m ». Nous trouvons souvent dans les documents produits en français trois types de notation indiquées à la figure 1.4.

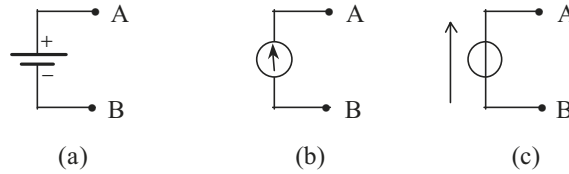


Figure 1.4 Différents symboles pour une source de tension.

Pour l'étude des circuits électriques, nous sommes souvent amenés à déterminer la tension entre deux points A et B, autrement dit aux bornes d'un dipôle AB. Dans ce cas, nous pouvons choisir la convention récepteur pour laquelle la flèche du courant et la flèche de la tension sont en sens inverse. Nous pouvons aussi choisir la convention d'un générateur (émetteur) pour laquelle la flèche du courant et la flèche de la tension sont dans le même sens. Dans la convention récepteur représentée sur la figure 1.5 (a), le générateur reçoit de l'énergie si le produit $U.I$ est positif, il en fournit si au contraire $U.I$ est négatif.

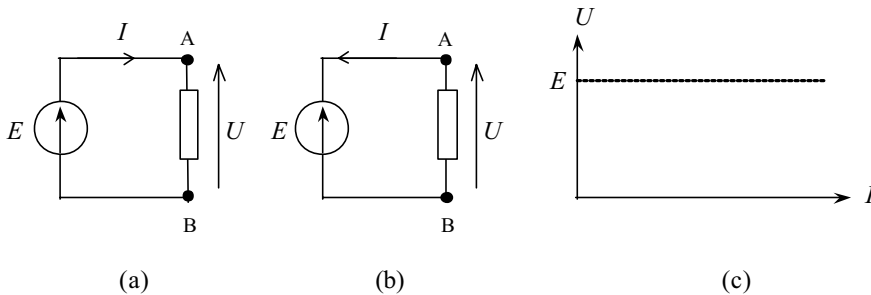


Figure 1.5 Source de tension avec la convention récepteur (a), la convention générateur (b) et courbe $U = f(I)$ en (c).

Supposons maintenant un générateur idéal de tension qui fournit à une charge quelconque un courant I . Nous pouvons tracer l'évolution de la tension en fonction du courant : $U = f(I)$ aux bornes de la charge. Cette caractéristique présentée à la figure 1.5 (c) se réduit à une droite parallèle à l'axe des courants et d'abscisse à l'origine égale à E , ce qui représente la valeur de la tension fournie par la source.

La puissance P_f fournie par le générateur est égale à la puissance dissipée par la charge. Cette puissance varie proportionnellement avec l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

$$U = U_A - U_B = \text{constante} \quad \text{et} \quad P_f = P_{\text{dissipée}} = U.I = E.I$$

La courbe représentant la variation de la puissance fournie par une source idéale de tension en fonction du courant débité est donnée à la figure 1.6.

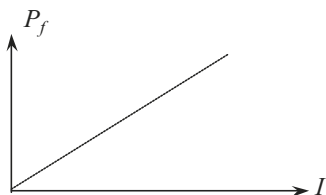


Figure 1.6 Variation de la puissance fournie en fonction du courant débité.

b) Source idéale de courant

Un générateur (source) de courant continu supposé idéal est un générateur fixant l'intensité du courant électrique I_g qui le traverse quelle que soit la différence de potentiel U à ses bornes, autrement dit quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas infinie. Le courant ainsi débité est aussi appelé courant de court-circuit.

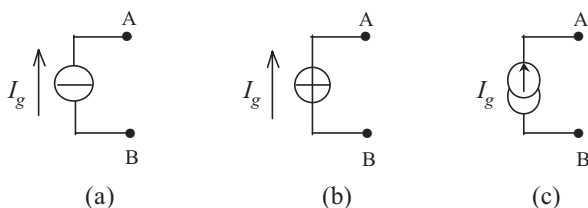


Figure 1.7 Nouveaux symboles (a) et (b) et ancien symbole (c) d'une source de courant.

Comme pour le générateur de tension, en utilisant la convention récepteur, si le produit $U.I$ est négatif, le générateur fournit de l'énergie ; si le produit $U.I$ est positif, le générateur reçoit de l'énergie. La figure 1.8 (a) donne le courant débité I en fonction de U et la figure 1.8 (b) la puissance fournie P_f en fonction de la tension U aux bornes du générateur de courant.

c) Générateur réel de tension

Un générateur réel de tension possède souvent une résistance interne R_g placée en série avec le générateur idéal de tension E_g . La tension qui apparaît entre les deux bornes du dipôle est égale à la somme algébrique de la tension fournie par le générateur E_g et de la chute de tension produite par le passage du courant I circulant dans la résistance interne.

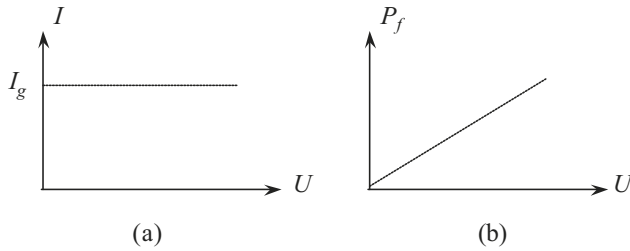


Figure 1.8 Variations du courant I (a) et de la puissance fournie P_f (b), en fonction de U .

Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$U = E_g + R_g \cdot I \quad \text{cas de la figure 1.9 (a)}$$

$$U = E_g - R_g \cdot I \quad \text{cas de la figure 1.9 (b)}$$

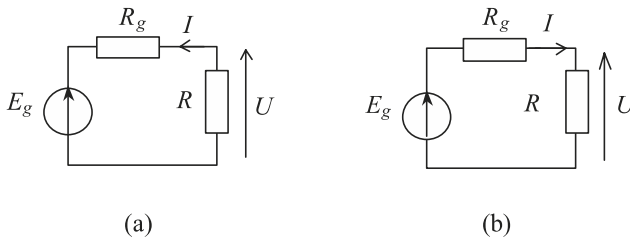


Figure 1.9 Générateur réel de tension chargé par une résistance R .

La caractéristique courant-tension du générateur réel s'obtient facilement en ajoutant algébriquement la caractéristique courant-tension du générateur idéal ($U = E_g$) et celle de la résistance interne ($R_g \cdot I$) à intensité I fixée. Si nous choisissons la convention générateur de la figure 1.9 (b), la caractéristique est représentée sur la figure 1.10 par la droite d'équation :

$$U = E_g - R_g \cdot I$$

Cette droite passe par les deux points dont les coordonnées sont :

$$\left(U = 0 \quad \text{et} \quad I = I_{CC} = \frac{E_g}{R_g} \right) \quad \text{et} \quad \left(U = E_g \quad \text{et} \quad I = 0 \right)$$

I_{CC} est appelé le courant de court-circuit de la source.

Si nous utilisons, comme nous l'avons représenté à la figure 1.9 (b), la convention générateur pour la source et la convention récepteur pour la résistance, lorsqu'une source réelle de tension est chargée par une résistance R , la tension U et le courant I doivent vérifier :

$$U = E_g - R_g \cdot I \quad \text{et} \quad U = R \cdot I$$

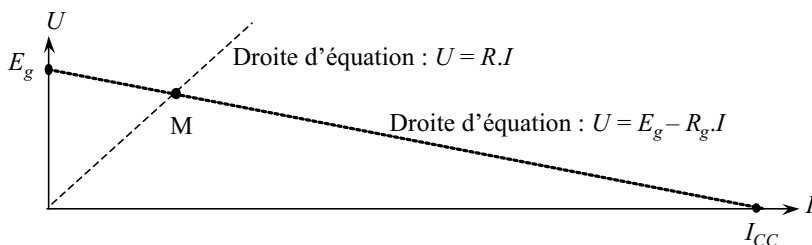


Figure 1.10 Caractéristique tension-courant d'une source réelle de tension.

Sur la figure 1.10, le point M de coordonnée (U, I) est représentatif de l'état du circuit. Il se trouve à l'intersection des deux droites d'équation :

- $U = E_g - R_g \cdot I$;
- $U = R \cdot I$.

Ce point est appelé *point de repos* ou *point de fonctionnement* du circuit. Parfois, pour des circuits complexes, si nous superposons une tension continue et une tension alternative, afin d'éviter des confusions, nous pouvons mettre *des indices zéro* (U_0, I_0) à la place de (U, I) .

d) Générateur réel de courant

Un générateur réel de courant présente toujours une résistance interne de fuite de courant. Cette résistance R_g est montée en parallèle avec le générateur idéal. Le courant total I qui traverse le dipôle est égal à la somme algébrique du courant dans la résistance interne R_g et du courant I_g fourni par le générateur.

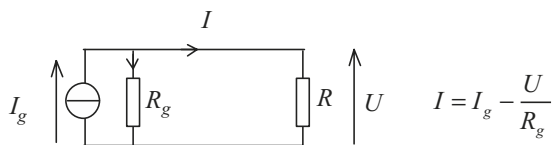


Figure 1.11 Source réelle de courant chargée par une résistance R .

La caractéristique courant-tension s'établit (comme pour le générateur réel de tension) en ajoutant l'intensité I_g à celle traversant la résistance R pour une différence de potentiel fixée.

Nous prenons la convention générateur pour la source de courant et la convention récepteur pour la résistance R . Lorsque la source est utilisée pour alimenter une résistance R , le point M représentatif de l'état du circuit de coordonnées (U, I) se trouve à l'intersection :

- de la caractéristique de la source dont l'équation est : $I = I_g - \frac{U}{R_g}$

- et de la caractéristique de charge d'équation : $I = \frac{U}{R}$

Le point d'intersection de la caractéristique de la source avec l'axe des abscisses, donne une tension notée $U_V = R_g \cdot I_g$ qui représente la tension à vide de la source de courant.

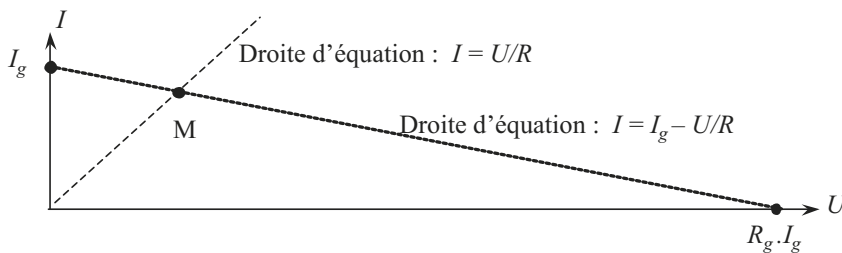


Figure 1.12 Variation du courant en fonction de la tension d'une source réelle de courant.



Remarque : Souvent, les résistances internes n'ont pas plus de réalité physique que les sources idéales auxquelles elles sont associées pour représenter les sources réelles. Ces représentations permettent de modéliser le comportement des sources vis-à-vis de l'extérieur. La résistance interne traduit un phénomène physique qui limite l'énergie tirée d'une source.

1.2.2 Tensions et courants périodiques

a) Fonction périodique

Un signal $u(t)$ ou $i(t)$ est périodique, de période « T » si, quel que soit l'instant t , nous avons :

$$u(t) = u(t + T) \quad \text{ou} \quad i(t) = i(t + T)$$

La connaissance du signal sur une durée égale à T , c'est-à-dire la connaissance de l'évolution de la fonction qui représente le signal est suffisante pour le déterminer complètement.

- T est la *période* du signal exprimée en seconde (s) ; nous utilisons les multiples et sous-multiples de cette unité. Cette période représente le temps qui sépare deux passages successifs par la même valeur avec le même sens de variation.
- La fréquence « f » qui est exprimée en hertz (Hz) donne le nombre de périodes par seconde. Nous pouvons aussi utiliser surtout les multiples de cette unité : kHz, MHz et même des GHz dans le cas de l'hyperfréquence.

Nous pouvons aussi rencontrer dans des documentations anciennes le terme de *cycle par seconde* qui a été remplacé par le hertz.

$$f = 1/T \quad \text{en Hz (ou s}^{-1}\text{)}$$

En électronique, nous avons affaire fréquemment à des fonctions périodiques. Par exemple, le spot lumineux d'un téléviseur ou d'un oscilloscope doit se déplacer d'une façon linéaire, de gauche à droite et de haut en bas. Nous appliquons pour cela sur les plaques de déviation horizontale et sur les plaques de déviation verticale deux tensions triangulaires.

Nous utilisons aussi des signaux carrés (signaux d'horloge) pour commander des composants en électronique digitale (numérique).

La figure 1.13 représente trois cas particuliers de fonctions périodiques, à savoir :

- La fonction : tension sinusoïdale $u_1(t)$
- La fonction : tension dents de scie $u_2(t)$
- La fonction : tension carrée sans offset (tension de décalage) $u_3(t)$

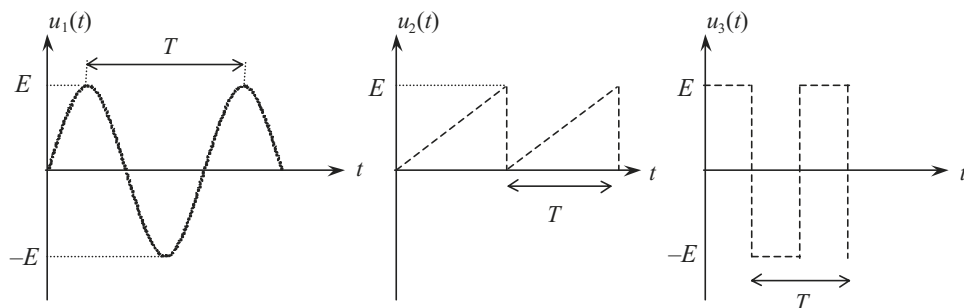


Figure 1.13 Exemples de fonctions périodiques de période T .

b) Fonction sinusoïdale

Le signal sinusoïdal est un signal périodique particulier. Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide des fonctions sinus et cosinus. On dit qu'un réseau linéaire fonctionne en régime sinusoïdal ou régime harmonique si ses tensions et courants ont pour expressions algébriques :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = S_{\text{Max}} \sin(\omega t + \phi)$$

Pour des raisons de commodité, en vue de ce qui va suivre (représentation de Fresnel et représentation complexe), nous préférons définir le signal sinusoïdal par la première expression qui correspond à une cosinusoïde. Nous avons présenté à la figure 1.14 (a) le signal cosinusoidal $s_1(t)$ et à la figure 1.14(b) le signal sinusoïdal $s_2(t)$:

$$s_1(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_{\text{Max}} \sin(\omega t)$$

La variable temps « t » est supposée varier de « $-\infty$ » à « $+\infty$ », $s(t)$ est la valeur (ou amplitude) instantanée exprimée en volt ou en ampère.

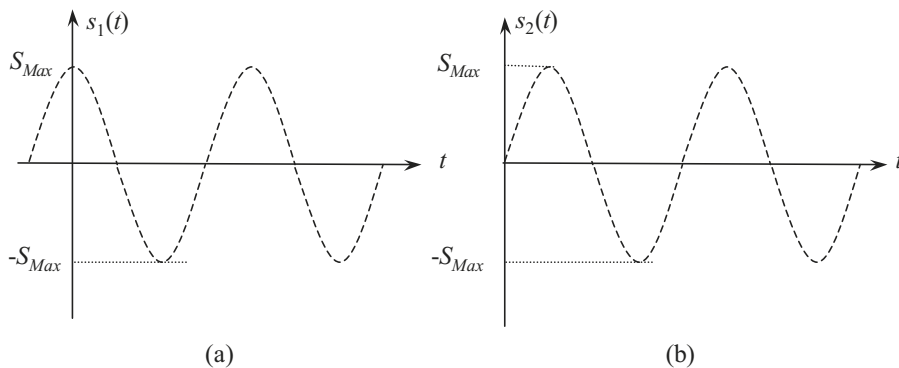


Figure 1.14 Représentation temporelle (cartésienne) d'un signal cosinusoidal (a) et d'un signal sinusoidal (b).

- $2S_{Max}$ représente la valeur *crête à crête* de $s(t)$;
- S_{Max} est la valeur maximale ou *crête* du signal $s(t)$;
- ω est la *pulsation* (appelée parfois vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence et à la période T par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{exprimée en radian par seconde (rad.s}^{-1}\text{)}$$

- $\omega t + \phi$ représente l'angle de phase instantanée appelé souvent *phase instantanée*, qui est exprimée généralement en radian et parfois en degré ;
- ϕ est l'angle de phase appelé souvent *phase à l'origine* exprimée en radian ou en degré.

c) Décalage et déphasage

Considérons par exemple un courant (ou une tension) sinusoidal :

$$s(t) = S_{Max} \cos(\omega t + \phi) ;$$

ce courant passe dans un circuit électrique. La sortie obtenue est notée : $s'(t) = S'_{Max} \cos(\omega t + \phi')$. Nous notons les phases instantanées : θ et θ' avec : $\theta = \omega t + \phi$ et $\theta' = \omega t + \phi'$

Nous appelons différence de phase (ou déphasage) instantanée entre $s(t)$ et $s'(t)$ la quantité :

$$\theta' - \theta = (\omega t + \phi') - (\omega t + \phi) = \phi' - \phi$$

Cette différence de phase $\Delta\phi = \phi' - \phi$ est une constante. Nous pouvons alors écrire :

$$s'(t) = S'_{Max} \cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{Max} \cos(\omega(t - (\phi - \phi')/\omega) + \phi)$$

L'expression précédente montre que $s'(t)$ à l'instant t_1 se trouve dans la même situation que $s(t)$ à l'instant : $t_2 = t_1 - (\phi - \phi')/\omega$. Deux cas se présentent :

- si $\phi > \phi'$, t_2 est antérieur à t_1 , le signal $s'(t)$ est en *retard de phase* sur $s(t)$. C'est le cas représenté à la figure 1.15 (a) ;
- si $\phi < \phi'$, t_1 est antérieur à t_2 , le signal $s'(t)$ est en *avance de phase* sur $s(t)$. Ce cas est représenté à la figure 1.15 (b).

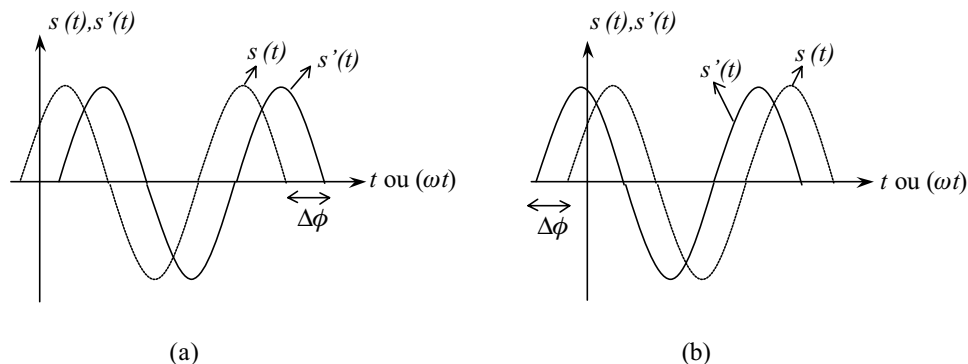


Figure 1.15 Représentation du déphasage entre $s(t)$ et $s'(t)$: $s'(t)$ est en retard de phase (a) ou en avance de phase (b) par rapport à $s(t)$.



Remarque 1 : Le raisonnement concerne deux signaux de même fréquence. Dans le cas contraire, nous ne pouvons plus utiliser la notion de déphasage.

Remarque 2 : Souvent, nous pouvons tracer $s(t)$ et $s'(t)$ en fonction du temps ou en fonction de ωt . Dans ce dernier cas, nous pouvons lire directement le déphasage sur l'axe des abscisses.

Nous voyons donc que la différence de phase $\phi - \phi'$ s'interprète physiquement comme étant, à une constante multiplicative près (qui est la pulsation ω), le retard compté algébriquement du signal $s'(t)$ sur le signal $s(t)$.

D'après la définition précédente, le déphasage peut être supérieur ou inférieur à 2π . Or un angle, donc un déphasage, est toujours défini à $2k\pi$ près. C'est le problème essentiel des mesures en régime sinusoïdal. Dans ce cas, le seul moyen d'apprécier réellement le déphasage est d'étudier le comportement du circuit en régime transitoire, c'est-à-dire lorsque la tension ou le courant passent brusquement d'une valeur à une autre.

d) Valeurs moyennes et valeurs efficaces

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale $s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$ est :

$$S_{\text{moyenne}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_{\text{Max}} \cos(\omega t) dt$$

$$S_{\text{moyenne}} = \frac{S_{\text{Max}}}{\omega \cdot T} [\sin(\omega t)]_0^T = 0$$

Puisque la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale pure est nulle, nous n'utilisons que rarement en électricité la notion de la valeur maximale S_{Max} d'une fonction *périodique*. En revanche, nous préférons lui substituer une grandeur plus significative S_{eff} , appelée valeur efficace, telle que :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Si nous prenons le cas particulier d'un signal sinusoïdal $s(t)$ avec :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi),$$

la valeur efficace devient :

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_{\text{Max}}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{S_{\text{Max}}^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\ S_{\text{eff}}^2 &= \frac{S_{\text{Max}}^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{S_{\text{Max}}^2}{2} \quad \text{soit : } S_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Les forces électromotrices, les tensions et les courants d'un circuit électrique en *régime sinusoïdal* ont pour expression la forme suivante :

$$s(t) = \sqrt{2} S_{\text{eff}} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sqrt{2} S_{\text{eff}} \sin(\omega t + \phi)$$

Les grandeurs de ces variables sont toujours données (ou lues), sur la plupart des appareils, en valeurs efficaces. Une tension alternative dite de 220 volts, varie entre $\pm 220 \sqrt{2}$ soit ± 310 volts en changeant de sens deux fois par période.



Remarque : Dans le cas général d'une tension périodique, la *valeur efficace vraie* connue sous le sigle TRMS (*True Root Mean Square*) est la valeur d'une tension continue qui produirait, dans une résistance identique, le même dégagement de chaleur dans le même temps, autrement dit une même dissipation de puissance. Dans le cas d'une sinusoïde, nous utilisons souvent juste les deux premiers mots « valeur efficace ».

1.2.3 Compléments sur les sources

a) Tensions et courants non périodiques

Il n'existe pas de régime permanent, qu'il soit statique ou harmonique au sens strict. Il a fallu, à un moment donné, mettre le circuit sous tension. Les grandeurs électriques ont changé de valeur à la mise sous tension. L'établissement de ces grandeurs prend un certain temps et le passage d'un régime permanent (souvent état de repos) à un autre régime permanent est alors appelé régime transitoire.

Souvent, nous utilisons des fonctions mathématiques pour modéliser l'évolution de la tension ou du courant en fonction du temps (voir chapitre 5 consacré aux régimes transitoires). Certaines d'entre elles présentent un grand intérêt.

► La fonction porte $\pi(t)$

La fonction porte ou fenêtre, représentée à la figure 1.16 (a), est la fonction $\pi(t)$ définie par :

$$\pi(t) = 1 \quad \text{pour} \quad |t| < T/2 \quad \text{et} \quad \pi(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > T/2$$

Cette fonction permet de modéliser la mise sous tension puis la coupure de l'électricité.

► La fonction impulsion de Dirac $\delta(t)$

Pour trouver la fonction impulsion de Dirac présentée à la figure 1.16 (b), nous prenons la fonction porte et nous supposons que T tend vers zéro. Nous obtenons :

- $\delta(t) = \lim \pi(t)$ lorsque T tend vers 0 ;
- $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$;
- $\delta(t) = \infty$ pour $t = 0$.

Physiquement, l'impulsion de Dirac ne peut être obtenue puisque cette impulsion présente un temps de montée nul. Cette fonction est importante dans l'analyse de circuits (filtres).

► La fonction échelon unité de Heaviside $u(t)$

La fonction échelon unité présentée à la figure 1.16 (c), est définie comme suit :

- $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et
- $u(t) = 1$ pour $t = 0$.

Nous utilisons souvent aussi la notion de $u(0^-) = 0$ et $u(0^+) = 1$

Cette fonction est intéressante puisqu'elle permet de modéliser l'établissement de manière instantanée d'un régime continu, d'où son rôle pour l'étude des régimes transitoires.

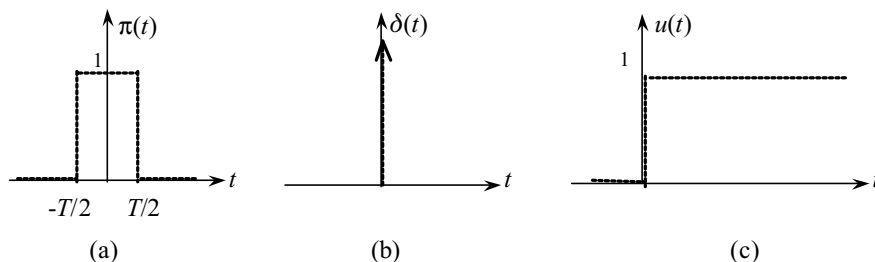


Figure 1.16 Représentation des fonctions : porte (a), impulsion de Dirac (b) et échelon (c).

► La fonction rampe $f(t)$

La fonction rampe présentée à la figure 1.17 (a) représente l'intégrale de la fonction échelon unité. Elle est définie comme suit :

- $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et
- $f(t) = at$ pour $t \geq 0$.

Cette fonction peut se révéler intéressante dans les cas concernant les études du contrôle, de la poursuite et de la régulation des systèmes électriques.

► La fonction exponentielle $g(t)$

La fonction exponentielle présentée à la figure 1.17 (b) est définie comme suit :

$$g(t) = e^{-at} u(t)$$

Cette fonction joue un rôle important dans l'analyse de circuits électriques.

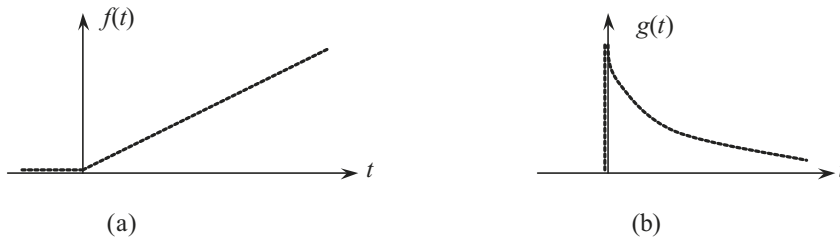


Figure 1.17 Représentation de la fonction rampe (a) et exponentielle (b).

b) Sources indépendantes et sources liées

Les sources de tensions et les sources de courants idéales (ou non), continues (ou sinusoïdales) étudiées auparavant sont des sources indépendantes. Mais il peut arriver que la force électromotrice (ou le courant) d'une source dépende d'une grandeur X quelconque du circuit (tension ou courant). La source est dite liée ou dépendante. Nous pouvons donc imaginer quatre sources dépendantes :

- une source de tension U' dépendant d'une source de tension U (a) : $U' = K_1 U$
- une source de tension U' dépendant d'une source de courant I (b) : $U' = K_2 I$
- une source de courant I' dépendant d'une source de courant I (c) : $I' = K_3 I$
- une source de courant I' dépendant d'une source de tension U (d) : $I' = K_4 U$

Les coefficients K_1 , K_2 , K_3 et K_4 sont des coefficients de proportionnalité (respectivement : sans dimension, homogène à une impédance, sans dimension et homogène à une admittance). Ces coefficients sont indépendants des tensions fournies ou des courants débités par les sources.

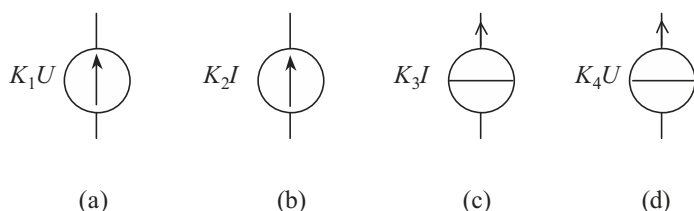


Figure 1.18 Représentation des quatre sources liées.

La notion de sources liées est à la base de l'étude de tous les modèles électriques concernant les éléments actifs tels que les transistors et d'une façon générale les amplificateurs. Ces sources dépendantes transforment l'énergie électrique, mais ne sauraient en fournir spontanément.

Un réseau passif est un réseau qui ne contient que des sources indépendantes. Un réseau actif contient des sources liées et souvent aussi, des sources indépendantes.

c) Extinction ou passivation d'une source indépendante

Dans certains cas, nous pouvons être amené à éteindre les sources, c'est à dire à annuler leurs effets ; autrement dit, nous supposons qu'elles ne fournissent plus aucune énergie au réseau. Deux cas se présentent :

- Une source idéale de tension est éteinte si elle se comporte comme un court-circuit quel que soit le courant qui la parcourt. Il suffit donc de la remplacer par un *court-circuit*.
- Une source idéale de courant est éteinte si elle se comporte comme un circuit ouvert quelle que soit la tension à ses bornes. Il suffit donc de la remplacer par un *circuit ouvert*.



Remarque 1 : Nous ne pouvons pas éteindre une source liée.

Remarque 2 : En général, nous travaillons avec des sources réelles qui comportent des résistances internes. Dans ce cas, il suffit de remplacer la source éteinte par sa résistance interne R_g . Cette opération s'appelle passivation des sources.

1.3 RELATION TENSION-COURANT

En pratique, une source de tension excite un ensemble d'éléments pour réaliser une fonction particulière. Nous trouvons, dans les circuits et réseaux électriques, des éléments passifs (les résistances, les condensateurs et les inductances) et des éléments actifs. Les éléments actifs peuvent être étudiés en utilisant un modèle équivalent constitué d'éléments passifs, en plus des sources contrôlées de tensions ou de courants.

1.3.1 Cas d'une résistance

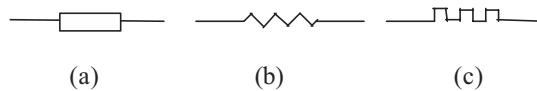


Figure 1.19 Symboles d'une résistance.

Les résistances sont des composants fabriqués en utilisant du carbone graphité, mélangé avec l'argile soit à l'aide d'un alliage possédant un fort coefficient de résistivité (constantan, manganin...) ou par dépôt sur un film métallique de couche d'oxydes.

Dans tous les cas, trois critères sont à considérer dans le choix d'une résistance :

- sa valeur ohmique exprimée en ohm et noté « Ω » ;
- sa puissance à dissiper de l'énergie. Nous trouvons des résistances simples 0,25 ou 0,5 watt et des résistances de puissance capables de dissiper au moins 1 watt ou davantage. Dans ce dernier cas, les résistances sont souvent à couches métalliques, bobinées ou vitrifiées. La valeur de la résistance est indiquée sur le composant.
- sa précision ou tolérance. Il existe plusieurs séries de résistances caractérisées par l'échelonnement des valeurs par décade. Par exemple la série E12, qui concerne des résistances de faible puissance comporte, 12 valeurs par décade, à savoir : 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 22 ; 27 ; 33 ; 39 ; 47 ; 56 ; 68 ; 82 (ainsi que les multiples et les sous-multiples). La valeur d'une résistance est indiquée selon le code des couleurs, à l'aide de quatre anneaux (les trois premiers pour la valeur ohmique et le quatrième pour la tolérance).



Remarque : Il existe une famille de résistances qui possède la propriété de varier en fonction d'un paramètre particulier. Parmi les plus utilisées, nous trouvons les *thermistances* qui sont des résistances dont la valeur varie en fonction de la température, soit en augmentant (CTP : thermistance à coefficient de température positif), soit en diminuant (CTN : thermistance à coefficient de température négatif). Ces résistances réservées à des applications particulières de contrôle et de comparaison ne seront pas étudiées dans ce livre.

La résistance est définie par la relation qui s'établit entre la tension à ses bornes et le courant qui la traverse, appelée *loi d'Ohm*.

$$u(t) = R.i(t)$$

$u(t)$ est exprimée en volt, R en ohm et $i(t)$ en ampère.

Si la tension aux bornes d'une résistance est de 1 volt et si cette résistance est parcourue par un courant de 1 ampère, la valeur ohmique de cette résistance est de 1 ohm.

Tout dispositif électrique qui consomme de l'énergie comporte au moins une résistance dans son circuit modélisé. La puissance instantanée dissipée par une résistance

est :

$$p(t) = u(t).i(t) \quad \text{en watt (W)}$$

Dans le cas particulier d'une tension continue, la puissance instantanée dissipée dans la résistance R devient :

$$p(t) = u(t).i(t) = U.I = R.I^2 = U^2/R \quad \text{en watt (W)}$$

Cette quantité est toujours positive, ce qui revient à dire qu'une résistance dissipe toujours de la puissance. Nous pouvons dire qu'une résistance joue le rôle d'un *récepteur*. Dans ce cas l'énergie consommée entre deux instants t_1 et t_2 s'obtient en intégrant la puissance instantanée :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad \text{en joule (J)}$$

Dans le cas particulier d'une tension continue, nous obtenons :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R.I^2 \times (t_2 - t_1) = \frac{U^2}{R} (t_2 - t_1) \quad \text{en joule (J)}$$

Sachant que l'expression de l'énergie est déterminée pour une durée égale à $(t_2 - t_1)$, nous pouvons en déduire l'expression de la puissance moyenne dissipée par une résistance :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{W}{t_2 - t_1} = \frac{W}{\Delta t} \quad \text{en watt (W)}$$

Dans le cas particulier d'une tension continue, la puissance moyenne devient :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{W}{t_2 - t_1} = R.I^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{en watt (W)}$$

Une résistance de valeur égale à 1 ohm, qui est parcourue par un courant I d'intensité égale à 1 ampère, dissipe sous forme de chaleur (effet joule) une puissance égale à 1 watt.

1.3.2 Cas d'un condensateur

Un condensateur est un composant passif constitué de deux conducteurs appelés souvent armatures, séparés par un diélectrique ou isolant (papier, mica ou air). Il s'agit d'un réservoir d'énergie électrostatique capable d'emmagasinier l'énergie dans un champ électrique. Lorsque la tension est variable sur un cycle, l'énergie sera stockée durant une partie du cycle puis restituée durant l'autre partie du cycle.

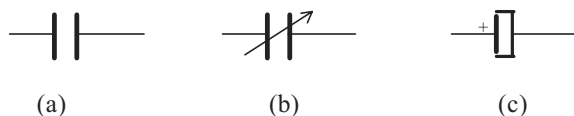


Figure 1.20 Symbole d'un condensateur normal (a), d'un condensateur variable (b) et d'un condensateur chimique (c).

En plus, le condensateur est capable de garder sa charge une fois débranché du circuit. Il reste chargé jusqu'à ce qu'une liaison permette la décharge.

Si le condensateur est traversé par un courant d'intensité i , la quantité de charges stockées pendant un intervalle de temps dt considéré constant est :

$$dQ = i \cdot dt \quad \text{en coulomb (C)}$$

Cette variation de charges engendre une variation de la différence de potentiel à ses bornes :

$$dQ = C du = i \cdot dt \quad \text{en coulomb (C)}$$

Plus le nombre de charges stockées est important, plus la différence de potentiel aux bornes est élevée. La capacité du condensateur à accumuler les charges, notée « C », a pour unité le farad (F). Le Farad étant une quantité très grande, on emploie souvent des sous-multiples.

Nous trouvons des condensateurs non polarisés tels que les condensateurs en céramique ou à film plastique, qui sont à usage fréquent, ou bien ceux en polyester métallisé de meilleure qualité, servant pratiquement à tous les usages.

D'autres condensateurs de valeurs plus élevées sont polarisés (dotés d'une borne + et d'une borne -) et doivent être mis dans le circuit électrique en respectant la polarité sous peine d'accidents. Il s'agit essentiellement de condensateurs électrochimiques, auxquels il faut rajouter les modèles au tantale, sous forme miniature « tantale goutte » ou sous boîtiers métalliques.

Soit un condensateur plan constitué de deux armatures de même surface « S ». Ces armatures sont séparées généralement par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r et d'épaisseur ℓ . La capacité du condensateur est donnée par l'expression suivante :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\ell} \quad \text{avec : } \epsilon_0 = \frac{1}{36 \times \pi \times 10^9}$$

ϵ_0 est la permittivité du vide et ϵ_r est la permittivité relative.

Les critères à considérer pour le choix d'un condensateur sont :

- *sa capacité* qui peut être indiquée de différentes façons. Il n'y a pas de règles générales respectées par tous les fabricants ;
- *sa précision* ou tolérance. Notons à ce sujet que la précision est souvent de l'ordre de 20 % et parfois plus, notamment pour les condensateurs électrochimiques ;
- *sa tension de service*. Cette tension représente la tension la plus élevée supportée par le condensateur. Attention, il ne faut jamais inverser la polarité pour les condensateurs chimiques.

La première conséquence qui se dégage à partir de l'équation fondamentale précédente concerne le régime continu établi :

$$U = \text{constante, soit : } \frac{dU}{dt} = 0, \text{ ce qui donne un courant : } i = 0$$

En régime continu, le courant qui circule dans un condensateur est nul. Ce composant se comporte donc comme un *circuit ouvert* (nous disons aussi interrupteur ouvert).

Inversement, un condensateur alimenté par un générateur de courant constant ($I_0 = \text{constante}$), développe à ses bornes une tension croissante U_C .

$$dQ = I \cdot dt = C \cdot du_C$$

ce qui donne une tension :

$$u_C = \frac{I_0}{C}t + U_0$$



Remarque : Un condensateur idéal *ne consomme pas* d'énergie ; cette dernière est simplement stockée en attendant d'être évacuée.

Les relations suivantes relient les différentes grandeurs :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = C \cdot u(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C \cdot u^2 \right]$$

$$W_C = \int_0^t p(t) dt = \frac{1}{2} C \cdot u^2$$

W_C est l'énergie accumulée par le condensateur au bout d'un temps t .

Supposons maintenant que pour $t = 0$, nous avons : $U = 0$ et $Q = 0$. Pour faire varier l'énergie W_C d'une quantité finie ΔW_C en un temps infiniment petit Δt , il faudrait fournir une puissance $\Delta W_C / \Delta t$ qui est infinie, ce qui est physiquement irréalisable. Nous déduisons donc :



Remarque : Ni la charge, ni la tension aux bornes d'un condensateur ne peuvent varier instantanément. En revanche, le courant qui traverse le condensateur peut subir une discontinuité.

1.3.3 Cas d'une inductance

a) Lois de l'électromagnétisme

► Champ magnétique

Si nous faisons circuler un courant électrique I dans une bobine à n spires, il y a création d'une *induction magnétique* $\vec{B}$ dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant $\vec{I}$. Le champ magnétique $\vec{H}$ qui en résulte est égal au produit $n \cdot \vec{I}$. L'ensemble des spires canalise les lignes d'induction, ce qui donne un flux d'induction $\vec{\Phi}$:

$$\vec{\Phi} = \vec{B} \cdot S \quad \text{où } S \text{ est la section droite de la bobine}$$

► Loi de Lenz et self induction

Soit un circuit fermé traversé par un flux $\vec{\Phi}$. Lorsque nous faisons varier $\vec{\Phi}$, par un procédé quelconque, le circuit devient le siège d'un courant dit courant induit $\vec{I}_i$. Le sens de ce courant induit est tel que le flux $\vec{\Phi}$ qu'il produit à travers le circuit qu'il parcourt tend à s'opposer à la variation de flux qui lui donne naissance. Il apparaît alors dans le circuit une force électromotrice induite « $\vec{e}$ » telle que :

$$\vec{e} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Le raisonnement inverse est vrai aussi, Si une inductance L est parcourue par un courant d'intensité i , la tension aux bornes de l'inductance est :

$$\vec{u} = L\frac{di}{dt} \quad \text{soit : } \vec{\Phi} = \vec{B} \cdot S = L \cdot \vec{i}$$

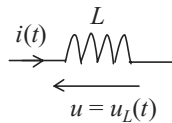


Figure 1.21 Symbole d'une inductance.

L'inductance (appelée également self) est l'élément de circuit capable de stocker l'énergie dans un champ magnétique pendant un certain temps T_1 avant d'être restituée durant T_2 au reste du circuit.

Comme pour le condensateur, nous pouvons déterminer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ p(t) &= u(t) \cdot i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Li^2 \right] \\ W_L &= \int_0^t p(t) dt = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \end{aligned}$$

W_L est l'énergie accumulée par l'inductance. Cette énergie ne pouvant varier instantanément, nous pouvons en déduire que :



Remarque : l'intensité du courant traversant une inductance ne peut subir de discontinuité. En revanche la tension aux bornes de la bobine peut parfaitement varier d'une façon discontinue.

La première conséquence qui se dégage à partir de l'équation fondamentale précédente concerne le régime continu établi : $i(t) = I_0 = \text{constante}$, donc :

$$\frac{dI_0}{dt} = 0, \quad \text{soit : } u_L = 0$$

En régime continu, la tension aux bornes d'une bobine est nulle. L'inductance se comporte donc comme un court-circuit (nous disons aussi interrupteur fermé).



Remarque : Une bobine idéale *ne consomme pas* de l'énergie ; celle-ci est simplement stockée en attendant d'être évacuée.

Souvent, on bobine soi-même son inductance, les valeurs normalisées sont rares et les exigences de qualité imposent souvent des solutions individuelles. Néanmoins, nous pouvons trouver des inductances miniatures à sorties axiales par exemple dont les valeurs varient de $0,1 \mu\text{H}$ jusqu'à 1 mH .

b) Interaction magnétique et mutuelle inductance

Prenons maintenant le cas de deux bobines d'inductances L_1 et L_2 couplées par exemple en utilisant le même noyau magnétique. Si l'une est parcourue par un courant $i(t)$ variable, ce courant engendre une force électromotrice dans la deuxième bobine et vice versa.

Pour traduire cette interaction d'une bobine sur l'autre, nous introduisons un coefficient d'induction mutuelle « M » ou *mutuelle inductance* tel que :

$$\Phi = M.I \quad \text{en henry (H) avec : } M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$k < 1$ est le coefficient de couplage.

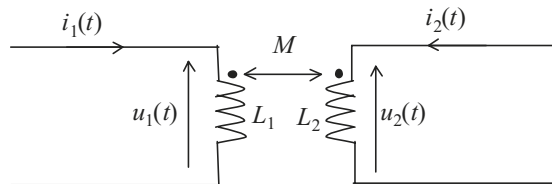


Figure 1.22 Représentation de l'effet de la mutuelle inductance.

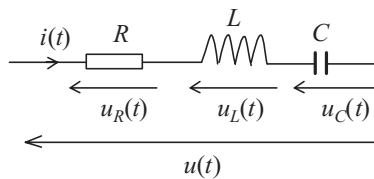
1.3.4 Équations des circuits simples

Lorsque nous sommes en présence d'un circuit simple, nous utilisons les lois générales et les équations fonctionnelles des éléments du circuit. Prenons par exemple le cas du circuit constitué par la mise en série d'une résistance, d'un condensateur et d'une inductance.

Nous constatons que le courant $i(t)$ est commun à tous les éléments. En parcourant le circuit de gauche à droite, nous obtenons :

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + \text{constante}$$

Figure 1.23 Cas d'un circuit RLC série.

1.3.5 Grandeurs, symboles et unités de mesures

Pour finir ce premier chapitre, nous allons présenter les unités de mesure les plus couramment utilisées en électricité et en électronique, ainsi que leurs significations. Nous rappelons que les préfixes suivants désignent :

$$\text{kilo} = 1\,000 = 10^3, \text{ méga} = 1\,000\,000 = 10^6, \text{ giga} = 10^9$$

$$\text{milli} = \frac{1}{1\,000} = 10^{-3}, \text{ micro} = 0,000\,0001 = 10^{-6}, \text{ nano} = 10^{-9}$$

► Le joule (J)

Le joule est l'unité de mesure du travail, d'énergie ou de quantité de chaleur. 1 joule représente le travail produit par une force de valeur 1 newton (N) dont le point d'application se déplace dans le même sens et dans la même direction que la force.

Une analogie entre le travail, les propriétés thermodynamiques des gaz et le dégagement de chaleur dans un conducteur a été faite par Joule. C'est cette dernière partie qui nous intéresse dans ce livre.

Le joule appartient au système international SI est une unité relativement faible. Nous utilisons souvent des multiples du joule (kilojoule kJ), mais nous utilisons rarement des sous-multiples (millijoule mJ).

► Le watt (W)

Le watt représente le flux énergétique ou thermique exprimé en unité du système international. Il s'agit de la puissance d'un système électrique dans lequel il y a un transfert d'énergie de 1 joule par seconde. En électricité, cette unité très utilisée représente la puissance dissipée par un dipôle que parcourt un courant constant de 1 ampère, lorsque la différence de potentiel aux bornes du dipôle est égale à 1 volt.

Le watt est une unité intermédiaire. Nous en utilisons pour l'électronique de puissance, l'électrotechnique et pour la distribution électrique des multiples (kilowatt kW, voire même des mégawatt, pour les centrales électriques MW). Pour la commande et le traitement des signaux en électronique, nous utilisons fréquemment des sous-multiples (milliwatt mW et parfois des nanowatts nW).

► Le volt (V)

Le volt est la différence de potentiel qui existe entre deux points du circuits. Lorsqu'une quantité de courant égale à 1 coulomb perd entre ces deux points une énergie de 1 joule, ce qui revient à dire une puissance dissipée de 1 watt.

Le volt qui est l'unité en système international SI est une unité intermédiaire, Nous en utilisons souvent pour la haute tension des multiples (kilovolt kV) et pour l'électronique, nous pouvons être amenés à utiliser des sous-multiples (millivolt mV, des microvolts « μV », et des nanovolts nV).

► L'ampère (A)

L'ampère, unité du courant électrique qui doit son nom au célèbre physicien français André Marie Ampère, fut d'abord défini comme étant égal à un débit de charge électrique de 1 coulomb par seconde.

La définition actuelle de l'ampère est l'intensité du courant qui, traversant deux conducteurs rectilignes et parallèles de longueurs infinies, de section négligeable et placés à 1 mètre l'un de l'autre dans un vide, produirait entre ces deux conducteurs une force de 2 newtons par mètre de longueur.

Nous utilisons souvent, pour les circuits qui fonctionnent à forte puissance, des multiples de l'ampère (kiloampère kA) et des sous-multiples (milliampère mA, microampère μA et nanoampère nA) pour les faibles puissances.

Tableau 1.2 Résumé des grandeurs, unités et symboles.

GRANDEUR	SYMBOLE DE LA GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE DE L'UNITÉ
Tension (ddp)	U (ou V)	volt	V
Force électromotrice	E	volt	V
Intensité	I	ampère	A
Résistance	R	ohm	Ω
Impédance	Z	ohm	Ω
Capacité	C	farad	F
Inductance	L	henry	H
Période	T	seconde	S
Fréquence	f	hertz	Hz
Energie	W	joule	J
Puissance	P	watt	W
Puissance apparente	S	volt-ampère	VA
Température	θ (ou T)	degré kelvin	K
Force	F	newton	N
Quantité d'électricité	Q	coulomb	C

► L'ohm (Ω)

L'ohm mesure la propriété d'un élément à s'opposer au passage du courant électrique. Lorsqu'un dipôle électrique soumis à une tension égale à 1 volt, laisse passer un courant de 1 ampère, le dipôle présente une résistance égale à 1 ohm. L'ohm est aussi la résistance électrique d'un conducteur qui dégage, sous forme de chaleur, une puissance de 1 watt lorsqu'il est parcouru par un courant constant de 1 ampère.

L'ohm est une unité petite. Pour des considérations de puissance, nous sommes souvent amenés à utiliser des multiples (kilo-ohm $k\Omega$ ou des méga-ohm $M\Omega$), mais nous pouvons, dans de rares cas, utiliser aussi ses sous-multiples.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- La puissance instantanée s'écrit : $p(t) = u(t) \times i(t)$ exprimée en watt « W ».
- La quantité d'énergie dissipée pendant « Δt » est :

$$W = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = \int_0^{\Delta t} u(t) \times i(t) dt \text{ en (J).}$$

- La puissance moyenne :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} p(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t) \times i(t) dt \text{ en watt.}$$

- Un générateur réel de tension possède une résistance interne R_g placée en série avec le générateur idéal de tension E_g . Pour une source idéale, R_g est nulle. Le point M est le *point de repos* ou *point de fonctionnement* du circuit. Il se trouve à l'intersection des deux droites d'équation : $U = E_g - R_g I$ et $U = RI$.

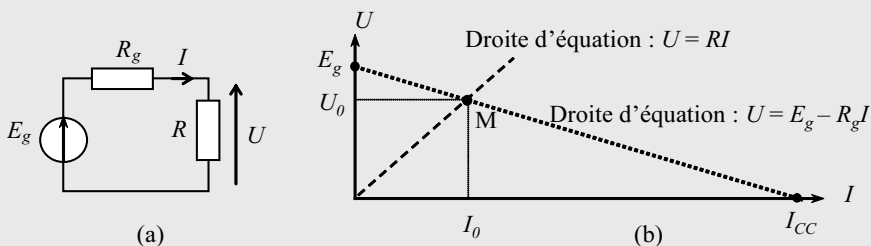


Figure 1.24 Générateur réel de tension chargé par une résistance et sa caractéristique de sortie.

- Un générateur réel de courant présente une résistance interne R_g placée en parallèle avec le générateur idéal de courant. Pour une source idéale, R_g est infinie. Le de repos

M se trouve à l'intersection des deux droites d'équation :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g} \quad \text{et} \quad I = \frac{U}{R}$$

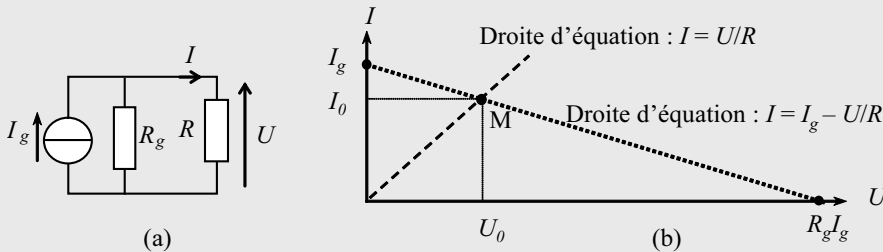


Figure 1.25 Générateur réel de courant chargé par une résistance et sa caractéristique de sortie.

► Un signal $u(t)$ ou $i(t)$ est périodique, de période « T » si, quel que soit l'instant t :

$$u(t) = u(t + T) \quad \text{ou} \quad i(t) = i(t + T) \quad \text{avec : } f = 1/T \text{ en Hz (ou s}^{-1}\text{)}$$

T est la *période* exprimée en seconde (s). La fréquence « f » est exprimée en hertz (Hz).

► Le signal sinusoïdal est un signal périodique qui s'exprime à l'aide des fonctions sinus et cosinus. La valeur (ou amplitude) instantanée exprimée en volt ou en ampère s'écrit :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = S_{\text{Max}} \sin(\omega t + \phi)$$

$2S_{\text{Max}}$ représente la valeur *crête à crête* de $s(t)$; S_{Max} est la valeur maximale ou *crête* de $s(t)$.

ω est la *pulsation* (ou vitesse angulaire) du signal : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ en radian par seconde.

$\omega t + \phi$ représente l'angle de phase instantanée appelé souvent *phase instantanée*.

ϕ est l'angle de phase appelé souvent *phase à l'origine*.

► Soit un signal $s(t) = S_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi)$ qui passe par un circuit électrique, la sortie est notée : $s'(t) = S'_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi')$. La différence de phase (déphasage) entre $s(t)$ et $s'(t)$ est la quantité :

$$\Delta\phi = \theta' - \theta = (\omega t + \phi') - (\omega t + \phi) = \phi' - \phi$$

Si $\phi > \phi'$ le signal $s'(t)$ est en *retard de phase* sur $s(t)$. C'est le cas représenté à la figure (a).

Si $\phi < \phi'$ le signal $s'(t)$ est en *avance de phase* sur $s(t)$. Ce cas est représenté à la figure (b).

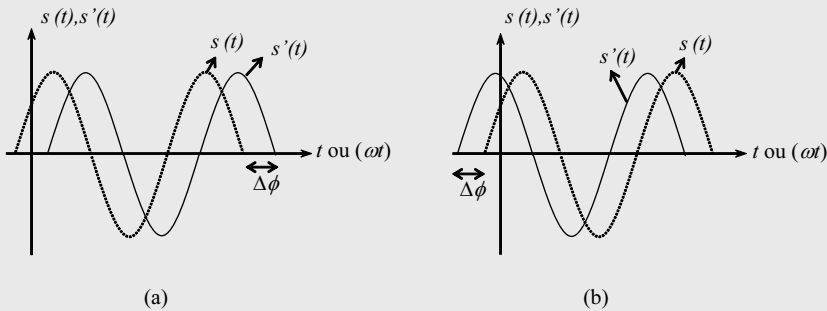


Figure 1.26 Déphasage entre $s(t)$ et $s'(t)$.

► La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale $s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$ est nulle. Sa valeur efficace S_{eff} est : $S_{\text{eff}} = S_{\text{Max}}/\sqrt{2}$.

► Les tensions et les courants électriques en *régime sinusoïdal* ont pour expression :

$$s(t) = \sqrt{2}S_{\text{eff}} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sqrt{2}S_{\text{eff}} \sin(\omega t + \phi)$$

► La résistance est définie par la relation qui s'établit entre la tension à ses bornes et le courant qui la traverse, appelée *loi d'Ohm* : $u(t) = R \times i(t)$ avec R exprimée en ohm (Ω).

► La puissance instantanée dissipée par une résistance dans le cas particulier d'une tension continue est :

$$p(t) = u(t) \times i(t) = U \times I = R \times I^2 = U^2/R \quad \text{en watt (W)}.$$

► Dans le cas particulier d'une tension continue, l'énergie consommée entre deux instants t_1 et t_2 est W , la puissance moyenne dissipée par une résistance est P_{moyenne} :

$$W = \frac{U^2}{R} (t_2 - t_1) \quad \text{en joule (J)} ; \quad P_{\text{moyenne}} = \frac{W}{t_2 - t_1} = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{en watt (W)}$$

► La quantité de charges stockées pendant un intervalle de temps dt d'un condensateur C , traversé par un courant d'intensité i est dQ . On a une variation de la différence de potentiel à ses bornes du . Les relations suivantes relient les différentes grandeurs :

$$dQ = C \times du = i \times dt \quad \text{en coulomb} ; \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \text{en ampère} ;$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \times u^2 \quad \text{en watts}$$

► Pour une inductance, nous pouvons déterminer les relations suivantes :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} ; \quad W_L = \frac{1}{2} L \times i^2$$

EXERCICES

Exercice 1.1 Propriétés d'un conducteur en cuivre

Le cuivre est un métal qui libère en moyenne un électron par atome. Nous supposons que le nombre d'atomes par m^3 est de 10^{29} .

1. Calculer la densité moyenne « n » des porteurs. En déduire la densité volumique des charges mobiles, notée ρ_v .
2. Un fil de cuivre cylindrique de 1 mm^2 de section est parcouru par un courant continu de 1 A . Calculer la densité de courant $\vec{J}$. En déduire la vitesse des charges mobiles $\vec{v}$.
3. La résistivité du cuivre utilisé vaut : $\rho = 1,5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Calculer la résistance d'un tronçon du fil précédent long de 10 m et déterminer la valeur du champ électrique dans le conducteur.

Solution

1. Comme chaque atome libère en moyenne un électron par atome, nous obtenons une densité d'électrons : $n = 10^{29} \text{ e.m}^{-3}$ (électron par mètre cube).

Cette densité est énorme. La densité volumique des charges mobiles vaut :

$$\rho_v = n (-q) = 10^{29} \times (-1,6 \times 10^{-19}) = -1,6 \times 10^{10} \text{ C.m}^{-3}$$

2. Nous supposons que la densité est uniforme, sa valeur est donc :

$$\vec{J} = \frac{I}{S} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ mm}^2} = 10^6 \text{ A.m}^{-2}$$

La vitesse d'ensemble des électrons (charges mobiles) devient :

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}}{\rho_v} = -\frac{10^6 \text{ A/m}^2}{1,6 \times 10^{10} \text{ C.m}^{-3}} \approx -6 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$

Le signe « $-$ » signifie que le vecteur densité de courant est orienté en sens opposé à celui du vecteur vitesse.

3. La résistance du tronçon de 10 m de long est donnée par :

$$R = \text{résistivité} \times \frac{\text{longueur}}{\text{surface}} = \rho \cdot \frac{\ell}{S} = 1,5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \times \frac{10 \text{ m}}{2 \text{ mm}^2} = 0,075 \Omega$$

La valeur du champ électrique est donnée par la loi d'Ohm locale :

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \rho \times \vec{J} = 1,5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \times 10^6 \text{ A.m}^{-2} = 0,015 \text{ V.m}^{-1}$$

Exercice 1.2 Propriétés du silicium intrinsèque et dopé

Le silicium intrinsèque comprend 5×10^{28} atomes. m^{-3} . À la température ambiante, 2×10^{16} paires électron-trou par mètre cube participent à la conduction électrique, n est la densité des électrons et p la densité des trous : $n = p = n_i$.

Nous connaissons la mobilité des électrons μ_n et des trous μ_p :

$$\mu_n = 0,14 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_p = 0,05 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

1. Calculer la résistivité du silicium intrinsèque à la température ambiante.
2. Calculer, à la température ambiante, la résistivité du silicium dopé avec des donneurs N_d avec un taux de dopage de 2×10^{-7} . Nous admettons le produit : $N_d \cdot p = n_i^2$.
3. Calculer dans les deux cas la résistance d'un tronçon de semi-conducteur de 2 mm^2 de section et de 1 cm de longueur.

Solution

1. Nous savons que la densité n d'électrons et la densité p des trous sont identiques :

$$n = p = n_i = 2 \times 10^{16} \text{ charges par m}^3$$

Nous pouvons en déduire la conductivité du silicium :

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = qn\mu_n + qp\mu_p = qn(\mu_n + \mu_p)$$

Nous en déduisons donc la résistivité du silicium intrinsèque :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q \cdot n (\mu_n + \mu_p)} = \frac{1}{1,6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{16} (0,14 + 0,05)} = 1,64 \times 10^3 \Omega \cdot \text{m}$$

La valeur de la résistivité d'un semi-conducteur est très élevée par rapport à celle d'un métal qui est de l'ordre de $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

2. La densité d'atomes des donneurs est :

$$N_d = 2 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{28} = 10^{22} \text{ atomes donneurs par m}^3$$

Puisque chaque atome donneur libère un électron, le nombre d'électrons libres vaut :

$$n = N_d = 10^{22} \text{ électrons par m}^3$$

Le nombre de trous, qui sont minoritaires comparés aux électrons, devient dans ce cas :

$$p = \frac{n_i^2}{N_d} = \frac{(2 \times 10^{16})^2}{10^{22}} = 4 \times 10^{10} \text{ trous par m}^3$$

Le nombre de trous, qui participe à la conduction par m^3 , devient négligeable par rapport au nombre d'électrons. La conductivité du silicium dopé avec des donneurs devient :

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = q \cdot N_d \cdot \mu_n + q \cdot p \cdot \mu_p = q (N_d \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p) \approx q \cdot N_d \cdot \mu_n$$

Nous en déduisons la résistivité du silicium dopé avec : $N_d = 2 \times 10^{-7}$:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q \cdot N_d \cdot \mu_n} = \frac{1}{1,6 \times 10^{-19} \times 10^{22} \times 0,14} = 4,46 \times 10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$$

La valeur de la résistivité d'un semi-conducteur dopé devient très nettement inférieure à celle d'un semi-conducteur intrinsèque.

3. La résistance du tronçon de 1 cm de longueur est donnée par :

$$R = \rho \times \frac{10^{-2}}{2 \times 10^{-6}}$$

Nous trouvons dans les deux cas :

pour le silicium intrinsèque : $R = 8,2 \times 10^6 \Omega$, pour le silicium dopé : $R = 22,3 \Omega$.

Exercice 1.3 Étude d'une source de tension chargée par une résistance

Soit le montage de la figure 1.27.

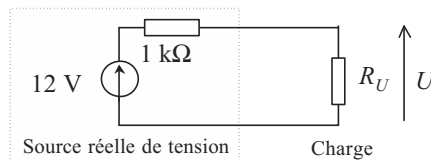


Figure 1.27 Source réelle de tension avec résistance de charge.

1. Tracer la caractéristique tension-courant de la source réelle.
2. La résistance d'utilisation R_U varie. Tracer la droite d'équation $U = R_U \cdot I$ pour les trois cas : $R_U = R_g$, $R_U = 2R_g$ et $R_U = 0,5R_g$.
3. Déterminer graphiquement les coordonnées des points de fonctionnement des trois cas précédents. En déduire les puissances fournies à la charge. Conclure.

Solution

1. La tension récupérée en sortie aux bornes de la source réelle de tension s'écrit :

$$U = E_g - R_g I$$

avec : $E_g = 12 \text{ V}$ et $R_g = 1 \text{ k}\Omega$.

Il s'agit d'une droite de pente négative qui passe par les deux points de coordonnées :

$$(12 \text{ V}, 0 \text{ mA}) \quad \text{et} \quad (0 \text{ V}, 12 \text{ mA})$$

Le premier point de coordonnées : (12 V, 0 mA) correspond à un fonctionnement à vide : c'est à dire en débranchant la charge

Le deuxième point de coordonnées : (0 V, 12 mA) correspond à un fonctionnement en court-circuit : c'est à dire en remplaçant R_U par un court-circuit.

Pour un fonctionnement normal, le point de fonctionnement doit être situé sur cette droite de charge, entre les deux points précédents.

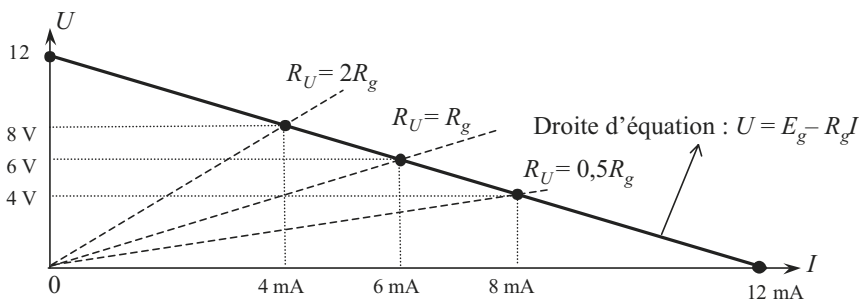


Figure 1.28 Caractéristique tension-courant de la source réelle de tension et les droites d'équation $U = R_U I$.

2. La droite d'équation qui reflète le fonctionnement en sortie de la source réelle est :

$$U = R_U I$$

Il s'agit d'une droite qui passe par l'origine avec une pente positive. Nous avons tracé sur la figure 1.28 les 3 droites qui correspondent aux 3 valeurs de R_U .

3. Nous pouvons déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation : $U = E_g - R_g I$ et de la droite d'équation $U = R_U I$. Nous trouvons :

- pour $R_U = R_g$ le point de coordonnées (6 V , 6 mA), soit : $P = U.I = 36 \text{ mW}$;
- pour $R_U = 2R_g$ le point de coordonnées (8 V , 4 mA), soit : $P = U.I = 32 \text{ mW}$;
- pour $R_U = 0,5R_g$ le point de coordonnées (4 V , 8 mA), soit : $P = U.I = 32 \text{ mW}$.

La puissance fournie à la charge passe par une valeur maximale lorsque la valeur de la résistance d'utilisation est égale à la valeur de la résistance interne de la source.

Exercice 1.4 Étude d'une source réelle de courant chargée par une résistance

Soit le montage de la figure 1.29.

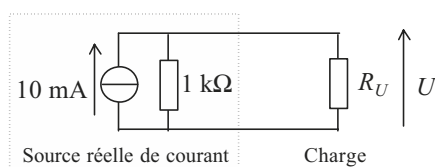


Figure 1.29 Source réelle de courant avec résistance de charge.

1. Tracer la caractéristique courant-tension de la source réelle.
2. La résistance d'utilisation R_U varie. Tracer la droite d'équation : $U = R_U \cdot I$ pour les cinq cas : $R_U = 1 \text{ k}\Omega$, $R_U = 2 \text{ k}\Omega$, $R_U = 5 \text{ k}\Omega$, $R_U = 0,5 \text{ k}\Omega$ et $R_U = 0,2 \text{ k}\Omega$.
3. Déterminer graphiquement les coordonnées des points de fonctionnement correspondants aux 5 cas précédents. En déduire les puissances fournies à la charge. Tracer la courbe représentant la variation de la puissance en fonction de R_U . Conclure.

Solution

1. Notons le courant du générateur $I_g = 10 \text{ mA}$, et prenons la convention récepteur pour la charge qui est parcourue par un courant noté I_U .

L'équation courant-tension s'écrit donc :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g} = 10 \text{ mA} - \frac{U}{1 \text{ k}\Omega} = 10 \text{ mA} - \frac{U}{10^3}$$

Il s'agit d'une droite qui passe par les deux points de coordonnées :

$$(10 \text{ mA}, 0\text{V}) \quad \text{et} \quad (0 \text{ mA}, 10 \text{ V})$$

Le premier point (10 mA , 0V) correspond à l'intersection de la caractéristique avec l'axe des ordonnées. Il s'agit d'un fonctionnement en court-circuit.

Le deuxième point (0 mA , 10 V) correspond à un fonctionnement en circuit ouvert, ce point donne une tension notée $U_V = R_g \cdot I_g$ qui est souvent appelée tension à vide de la source de courant.

2. Les droites d'équations : $U = R_U \cdot I$ sont des droites qui passent par l'origine O avec des pentes égales à $1/R_U$. Nous avons tracé ces droites directement sur la figure 1.30 de la question précédente.

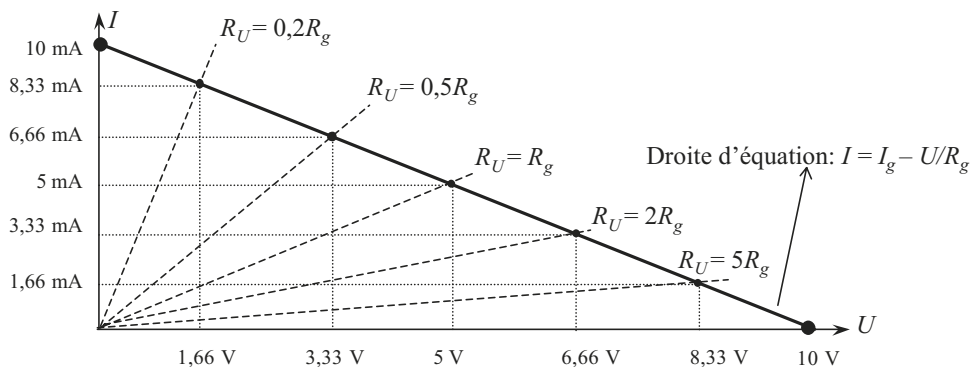


Figure 1.30 Caractéristique courant-tension d'une source réelle de courant et droites d'équations : $U = R_U \cdot I$.

3. Nous pouvons déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux droites d'équations :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g} = 10 \text{ mA} - \frac{U}{1 \text{ k}\Omega} = 10 \text{ mA} - \frac{U}{10^3}$$

et

$$I = \frac{U}{R_U}, R_U \text{ étant une résistance variable}$$

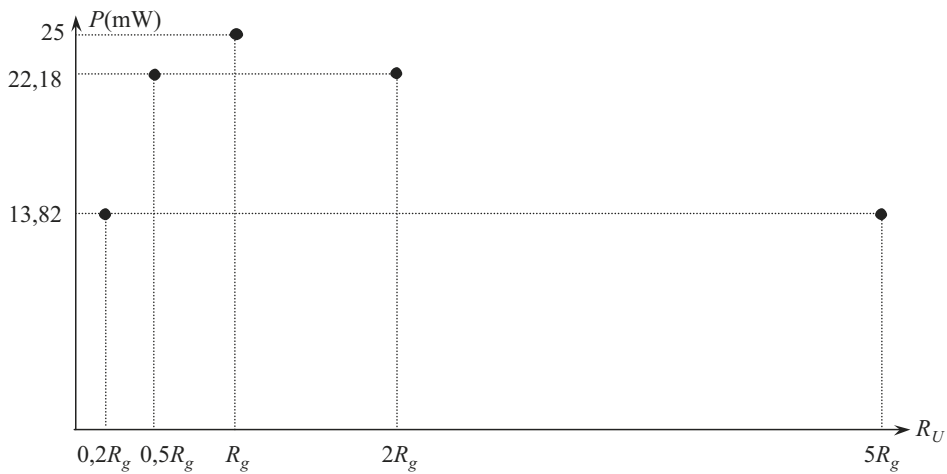


Figure 1.31 Variation de la puissance P en fonction de la résistance R_U .

- $R_U = R_g$, le point (5 V ; 5 mA) donne $P = U.I = 25 \text{ mW}$;
- $R_U = 2R_g$, le point (6,66 V ; 3,33 mA) donne $P = U.I = 22,18 \text{ mW}$;
- $R_U = 5R_g$, le point (8,33 V ; 1,66 mA) donne $P = U.I = 13,82 \text{ mW}$;
- $R_U = 0,5R_g$, le point (3,33 V ; 6,66 mA) donne $P = U.I = 22,18 \text{ mW}$;
- $R_U = 0,2R_g$, le point (1,66 V ; 8,33 mA) donne $P = U.I = 13,82 \text{ mW}$.

La puissance fournie à la charge passe par une valeur maximale lorsque la valeur de la résistance d'utilisation est égale à la valeur de la résistance interne de la source.

Exercice 1.5 Valeurs moyennes et efficaces et signaux périodiques

Soit les tensions : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ données à la figure 1.32.

1. Calculer pour chaque tension, la valeur moyenne.
2. Calculer les valeurs efficaces. Conclure.

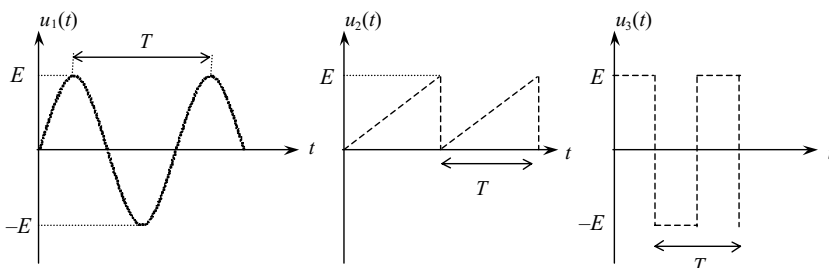


Figure 1.32 Signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Solution

1. Les tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ sont périodiques, la valeur moyenne d'une tension $u(t)$ est :

$$U_{\text{moyenne}} = \langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Nous pouvons écrire les équations mathématiques des différentes tensions :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= E \sin(\omega t) \\ u_2(t) &= \frac{E}{T} t \\ u_3(t) &= \begin{cases} +E & \text{si } t \in [0, T/2] \\ -E & \text{si } t \in [T/2, T] \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer les valeurs moyennes des différentes tensions :

$$U_{1\text{moyenne}} = \langle u_1(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{max}} \sin(\omega t) dt = 0$$

$$U_{2\text{moyenne}} = \langle u_2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E}{T} t dt = \frac{1}{T} \frac{E}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T$$

$$U_{2\text{moyenne}} = \frac{E}{T^2} \left[\frac{T^2}{2} - 0 \right] = \frac{E}{2}$$

$$U_{3\text{moyenne}} = \langle u_3(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_3(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T -E dt$$

$$U_{3\text{moyenne}} = \frac{E}{T} [t]_0^{T/2} - \frac{E}{T} [t]_{T/2}^T = \left(\frac{E}{T} - \frac{E}{T} \right) [t]_0^{T/2} = 0$$

2. La valeur efficace d'une tension périodique s'écrit :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

- Pour le signal sinusoïdal, $u(t) = E \sin(\omega t)$, la valeur efficace devient :

$$U_{1(\text{eff})}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_1^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2 \sin^2(\omega t) dt$$

$$U_{1(\text{eff})}^2 = \frac{E^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{E^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$U_{1(\text{eff})}^2 = \frac{E^2}{2} \quad \text{soit : } U_{1(\text{eff})} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

- Pour le signal rampe, nous avons :

$$U_{2(\text{eff})}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_2^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E^2}{T^2} t^2 dt = \frac{E^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt$$

$$U_{2(\text{eff})}^2 = \frac{E^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^T = \frac{E^2}{T^3} \left[\frac{T^3}{3} - 0 \right] \quad \text{soit : } U_{2(\text{eff})} = \frac{E}{\sqrt{3}}$$

- Pour le signal carré, nous avons :

$$U_{3(\text{eff})}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_3^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-E)^2 dt$$

$$U_{3(\text{eff})}^2 = \frac{E^2}{T} [t]_0^T = \frac{E^2}{T} [T - 0] \quad \text{soit : } U_{3(\text{eff})} = E$$

Nous constatons que, même si la valeur moyenne d'une tension est nulle, sa valeur efficace existe et est positive. Cette quantité représente la valeur de la tension continue qui provoquerait le même dégagement de chaleur dans une résistance.

Exercice 1.6 Étude d'une source de tension chargée par une inductance

Soit les deux montages de la figure 1.33.

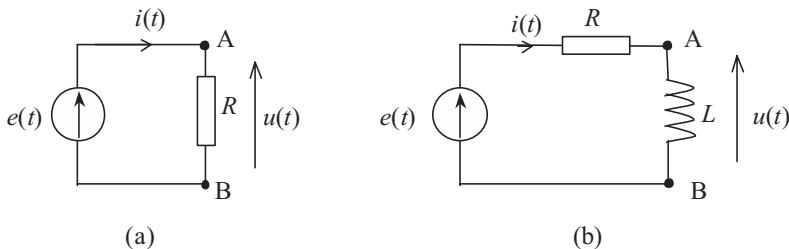


Figure 1.33 Charge résistive (a) et charge inductive (b) d'une source de tension.

$e(t)$ est une tension sinusoïdale : $e(t) = E \sin(\omega t)$, avec :

$$E = 10 \text{ V}, \quad \omega = 2\pi 10^5 \text{ rad/s}, \quad R = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad L = 1 \text{ mH}$$

1. Déterminer, pour chaque montage, l'expression du courant $i(t)$ en fonction des éléments du circuit. En déduire le déphasage.
2. Calculer pour chaque cas, l'impédance du montage donnée par le rapport de la tension sur le courant. En déduire son module.
3. Tracer en fonction du temps le courant $i(t)$ et la tension $e(t)$.

Solution

1. Pour le montage de la figure 1.33 (a), la tension $e(t)$ se trouve aux bornes de la résistance R . La loi d'Ohm donne :

$$e(t) = E \sin(\omega t) = R.i(t) \quad \text{soit} : i(t) = \frac{E}{R} \sin(\omega t) = I \sin(\omega t)$$

$$e(t) = 10 \sin(2\pi \times 10^5 t) \quad \text{et} \quad i(t) = 10 \times 10^{-3} \sin(2\pi 10^5 t) = I \sin(\omega t)$$

La tension $e(t)$ et le courant $i(t)$ s'écrivent sous deux formes identiques. Tous les deux sont en phase (déphasage $\phi = 0$).

Pour le montage de la figure 1.33 (b), la tension $e(t)$ se trouve aux bornes de la résistance R et de l'inductance L (bobine). La loi d'Ohm donne :

$$e(t) = E \sin(\omega t) = R.i(t) + u_L(t) \quad \text{avec} : u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

En remplaçant $u_L(t)$ par sa valeur, nous obtenons :

$$e(t) = E \sin(\omega t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Nous notons : $i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$.

En dérivant $i(t)$ dans l'expression de la loi d'Ohm, nous obtenons :

$$E \sin(\omega t) = R.I \sin(\omega t + \phi) + L\omega.I \cos(\omega t + \phi)$$

Cette identité doit être vérifiée à chaque instant. En particulier :

$$\text{à l'instant } t_0 = 0, \quad R.I \sin(\phi) + L\omega.I \cos(\phi) = E \sin(0) = 0$$

$$\text{à l'instant } t = t_1 = \frac{\pi}{2\omega}, \quad L\omega.I \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + R.I \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = E \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues ϕ et I :

$$\begin{cases} R \sin(\phi) + L\omega \cos(\phi) = 0 \\ I [L\omega \sin(-\phi) + R \cos(\phi)] = E \end{cases}$$

La première équation donne :

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = -\frac{L\omega}{R} = -0,628$$

$\phi = \text{Arc tan}(-0,628) = -32,14^\circ$ soit : $\phi = -0,56$ rad.

2. L'angle ϕ étant négatif, nous pouvons le noter : $\phi = -\varphi$. Dans ce cas, l'expression du courant est : $i(t) = I \sin(\omega t - \varphi)$. La première équation devient : $R \sin(-\varphi) + L\omega \cos(\varphi) = 0$.

Nous pouvons donc tirer $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$:

$$\sin(\varphi) = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

En remplaçant dans la deuxième équation, $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$ par leurs expressions, nous obtenons :

$$I \left[L\omega \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} + R \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \right] = E$$

$$\text{soit : } I \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = E$$

Nous pouvons déduire le module de l'impédance Z :

$$|Z| = \frac{E}{I} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{Avec : } Z = \frac{e(t)}{i(t)} = \frac{E \sin(\omega t)}{I \sin(\omega t - \varphi)} = \frac{E \sin(\omega t)}{E \sin(\omega t - \varphi)} \times \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{Application numérique : } |Z| = \frac{E}{I} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 1\,181 \, \Omega$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{L\omega}{R} = \quad \text{soit : } \varphi = 0,56 \text{ rad}$$

3. La tension est en avance de phase sur le courant, ou le courant est en retard de phase sur la tension. Nous pouvons tracer les deux courbes :

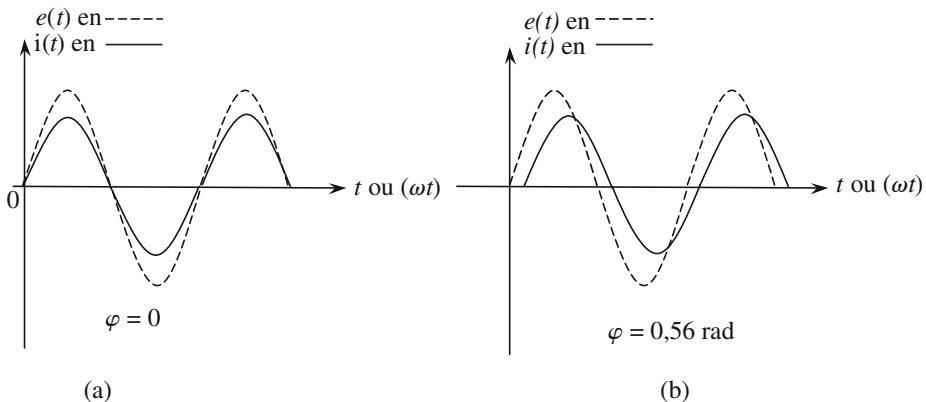


Figure 1.34 Représentation du déphasage φ .

Exercice 1.7 Valeurs moyennes et valeurs efficaces de signaux périodiques

1. On donne la forme d'une tension périodique (sinusoïdale redressée double alternances) de la figure 1.35.(a) . Calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace.
2. On donne la forme d'un signal impulsionnel périodique de la figure 1.35.(b). Calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace.

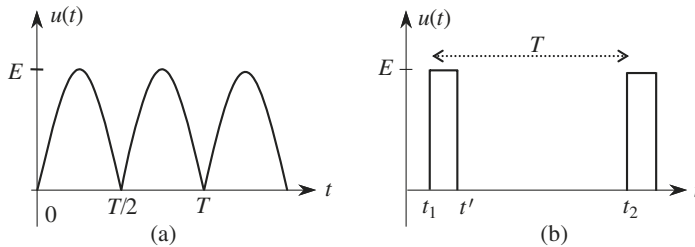


Figure 1.35 Redressement double alternance (a) et allure du signal impulsionnel (b)

Solution

1. Cas du redressement double alternance

On étudie la cas du redressement double alternance. La tension redressée est notée $u(t)$, Sachant que la tension d'origine est une tension sinusoïdale notée : $e(t) = E \sin(\omega t)$, on fait un changement de variable : $\omega t = \theta$.

La tension redressée étant identique à la première alternance de $e(t)$ mais répétée deux fois. La valeur moyenne devient :

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} E \sin(\theta) d\theta = \frac{E}{\pi} [-\cos(\theta)]_0^{\pi}$$

$$\bar{U} = \frac{E}{\pi} [-\cos(\pi) + \cos(0)] = \frac{2E}{\pi}$$

De même, le calcul de la valeur efficace s'obtient en calculant :

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{E^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{E^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{E^2}{4\pi} [(2\pi - 0) - [\sin(2\theta)]_0^{2\pi}] = \frac{E^2}{2}$$

$$\text{On en déduit : } U_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}$$

2. Cas d'un signal impulsionnel périodique

On utilise le même raisonnement. On a une impulsion positive d'amplitude E et de durée τ : $\tau = t' - t_1$. La période du signal est T . Il vient :

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$$

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t'} E dt + 0 = \frac{E}{T} \times [t]_{t_1}^{t'} = \frac{E}{T} \times [t_2 - t_1] = E \times \frac{\tau}{T}$$

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t'} E^2 dt$$

$$U_{eff}^2 = \frac{E^2}{T} \times [t]_{t_1}^{t'} = \frac{E^2}{T} \times [t' - t_1] = E^2 \times \frac{\tau}{T}$$

On en déduit : $U_{eff} = E \times \sqrt{\frac{\tau}{T}}$

Exercice 1.8 *Comportement de deux accumulateurs montés en parallèle en fonction des valeurs des résistances internes*

On souhaite étudier le comportement de deux piles (accumulateurs) en fonction des valeurs de leurs résistances internes et de leurs forces électromotrices.

1. La résistance R_U varie de zéro à l'infini. Déterminer l'expression de la tension U en fonction de E_1 , R_1 , E_2 , R_2 et R_U . En déduire le fonctionnement pour $R_U = 0$ et pour $R_U = \infty$.

2. On suppose que E_2 est supérieure à E_1 : $E_2 > E_1$. Étudier le cas général et déterminer en fonction des valeurs des résistances le comportement de chaque pile.

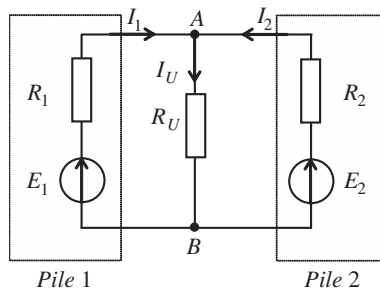


Figure 1.36 Montage d'étude à deux piles électriques.

Solution

1. Expression de la tension U en fonction de E_1, R_1, E_2, R_2 et R_U

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la tension U . La solution qui nous paraît la plus simple consiste à appliquer le théorème de Millman. On prend le potentiel du point B comme référence de tension : $V_B = 0$.

$$U = V_A - V_B = V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R_U}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_U}} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U}$$

Cas particulier : $R_U = 0$. C'est le régime du court-circuit ce qui revient à prendre : $G_U = \infty$.

$$U_{cc} = \lim_{G_U \rightarrow \infty} \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U} = 0$$

On trouve une différence de potentiel nulle, ce qui est normal en régime de court-circuit.

Cas particulier : $R_U = \infty$. C'est le régime du circuit à vide ce qui revient à prendre : $G_U = 0$.

$$U_{vide} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E_1 + \frac{G_2}{G_1 + G_2} E_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

2. Étude du cas général

On est dans le cas pour lequel E_2 est supérieure à E_1 : $E_2 > E_1$.

Comportement de la pile numéro 2

Cherchons à connaître le comportement de la pile numéro 2 en comparant la tension U à la force électromotrice E_2 .

$$E_2 - U = E_2 - \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U} = \frac{E_2 (G_1 + G_2 + G_U) - E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U}$$

$$E_2 - U = \frac{E_2 G_1 + E_2 G_2 + E_2 G_U - E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U} = \frac{(E_2 - E_1) G_1 + E_2 G_U}{G_1 + G_2 + G_U}$$

Puisque $E_2 > E_1$, l'expression précédente donne : $E_2 - U > 0$, la pile numéro 2 se comporte donc comme un générateur et ceci quelque soit les valeurs des différentes résistances du montage. Le courant I_2 circule comme indiqué à la figure 1.36.

Comportement de la pile numéro 1

Cherchons à connaître le comportement de la pile numéro 1 en comparant la tension U à la force électromotrice E_1 .

$$E_1 - U = E_1 - \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U} = \frac{E_1 (G_1 + G_2 + G_U) - E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U}$$

$$E_1 - U = \frac{E_1 G_1 + E_1 G_2 + E_1 G_U - E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U} = \frac{E_1 (G_2 + G_U) - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_U}$$

Puisque le dénominateur est positif, on doit étudier le signe du numérateur :

$E_1 \left(1 + \frac{G_U}{G_2}\right) < E_2$, on a donc : $E_1 - U < 0$, la pile numéro 1 se comporte comme un **récepteur** qui reçoit l'énergie de la pile numéro 2. Le courant I_1 circule dans un sens contraire à celui indiqué à la figure 1.36.

$E_1 \left(1 + \frac{G_U}{G_2}\right) > E_2$, on a donc : $E_1 - U > 0$, la pile numéro 1 se comporte comme un **générateur** qui fournit l'énergie à la résistance R_U . Le courant I_1 circule comme indiqué à la figure 1.36.

$E_1 \left(1 + \frac{G_U}{G_2}\right) = E_2$, on a donc : $E_1 - U = 0$, la pile numéro 1 se comporte comme si elle n'existait pas. Aucun courant I_1 ne circule dans la branche formée par R_1 et E_1 .

Chapitre 2

Les réseaux linéaires en régime statique

En électricité et en électronique, nous pouvons être amenés à calculer la différence de potentiel U_{AB} entre deux points A et B d'un circuit électrique, ce qui revient à déterminer le courant I_{AB} qui circule dans la branche AB. Les deux grandeurs, tension et courant, sont dépendantes.

L'objectif de ce chapitre consiste à présenter les notions fondamentales sur les réseaux électriques avant de donner les principales méthodes de calcul. Nous nous limiterons au régime statique établi. Dans ce cas, les sources fournissent des tensions et des courants qui sont indépendants du temps.

De ce fait, en régime statique les condensateurs sont considérés comme des circuits ouverts et les bobines comme des court-circuits. Seules les résistances sont prises en compte dans cette étude qui sera généralisée au régime sinusoïdal dans le troisième chapitre.

2.1 DÉFINITIONS

2.1.1 Réseau électrique

Un réseau ou un circuit électrique est constitué d'un ensemble de composants (ou éléments) interconnectés. En général, le circuit comporte au moins une source de tension ou de courant, des résistances et éventuellement un ou plusieurs composants actifs, comme par exemple les transistors ou les amplificateurs opérationnels.

Nous avons présenté sur la figure 2.1 (a) et 2.1 (b) deux exemples de circuits électriques avec et sans élément actif (transistor).

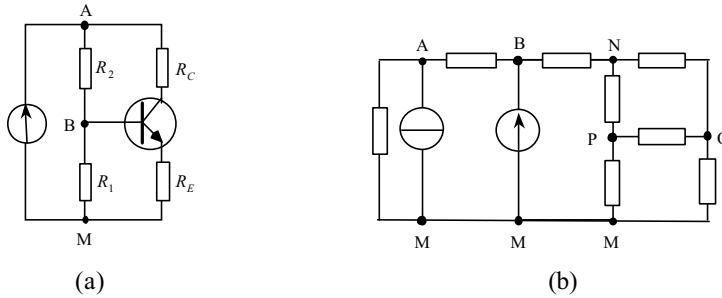


Figure 2.1 Exemples de réseaux électriques.

2.1.2 Dipôle

Nous appelons dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, communiquant avec l'extérieur seulement par deux bornes. À tout instant, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre. La résistance R_1 de la figure 2.1 (a) ou la source de tension entre B et M de la figure 2.1(b), constituent deux exemples de dipôles.

2.1.3 Nœud

Un nœud est un point de connexion (raccordement) entre plusieurs dipôles (éléments). Le nœud est souvent matérialisé sur un schéma par un point lors du croisement de deux conducteurs. Ceci revient à trouver au moins trois fils électriques qui viennent se raccorder au même endroit. Par exemple sur la figure 2.1(a), les points A, B et M sont des nœuds. Entre deux nœuds d'un circuit, le potentiel est à priori différent.



Remarque : Sur la figure 2.1 (b), la ligne du bas contient trois points en gras, mais il s'agit en fait du même potentiel. En réalité un seul point suffit.

2.1.4 Branche d'un circuit électrique

Une branche est une portion d'un réseau limitée par deux nœuds qui en sont les extrémités. Il s'agit donc d'un sous-ensemble d'éléments mis en série, (c'est-à-dire parcourus au même instant par le même courant) et joignant deux nœuds. C'est le cas par exemple de AB, BM, BN ou PO...

2.1.5 Maille

Une maille est un contour fermé constitué par une succession de branches, mais ne comportant jamais deux fois la même branche (ne passant jamais deux fois sur le même nœud). Dans le schéma de la figure 2.1(b), l'exemple de maille noté BNPMB contient quatre branches ayant chacune un élément. ABMA est un autre exemple de maille constituée de trois branches. La branche AM est soit la branche constituée par la résistance, soit la branche constituée par la source de courant.

2.1.6 Réseau linéaire et réseau non linéaire

Nous pouvons distinguer deux types d'éléments :

a) Élément linéaire

Un élément est dit linéaire si la relation qui relie la différence de potentiel U à ses bornes, au courant I qui le parcourt, est linéaire au sens mathématique du terme. C'est-à-dire représenté par une droite $I = kU$ qui passe par l'origine.

Deux conséquences essentielles découlent de la linéarité :

- La stationnarité qui est l'invariance dans le temps. Autrement dit, les mêmes expériences, réalisées à des instants différents, aboutissent aux mêmes résultats.
- La proportionnalité des effets aux causes. Autrement dit, l'addition (ou la simultanéité) des causes entraîne l'addition des effets. Le principe de la superposition est applicable.

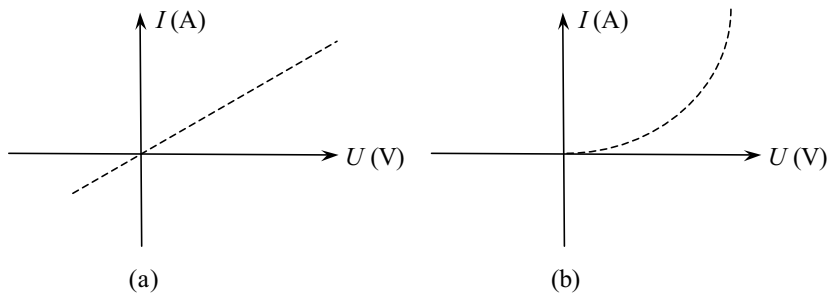


Figure 2.2 Caractéristiques d'un élément linéaire (a) et non linéaire (b).

b) Élément non linéaire

Une résistance à coefficient de température positif CTP, une résistance à coefficient de température négatif CTN ou une ampoule représentent des éléments non linéaires, car la relation entre le courant I et la différence de potentiel U n'est pas une droite. La variation de l'intensité du courant provoque une modification de la résistance, due à une modification de la température.



Remarque : Il n'existe pas au sens strict du terme d'éléments linéaires quel que soient la tension U et le courant I . L'élément est linéaire dans un domaine d'utilisation.

Un réseau est dit linéaire si tous les éléments qui le composent sont linéaires.

2.2 LOIS DE KIRCHHOFF

Nous supposons que les conducteurs qui assurent les liaisons entre les composants sont parfaits, c'est à dire sans résistance et par là même équipotentiels. D'autre part, ils ne peuvent ni accumuler ni fournir de charges électriques ; ils se contentent de les véhiculer.

2.2.1 Loi de Kirchhoff des nœuds

L'intensité du courant électrique étant la mesure du débit de charges, sur un temps donné, le nombre de charges arrivant à un nœud est égal au nombre de charges qui le quitte. En d'autres termes, il n'y a ni accumulation de charges au nœud, ni « fuite » de charges. La loi des nœuds reflète donc la *conservation du nombre de charges*.

Ce qui se traduit par l'énoncé de la première loi ou lemme de Kirchhof :

La somme algébrique des intensités des courants arrivant à un nœud est nulle. Ceci est vrai si nous prenons la convention selon laquelle tout courant entrant au nœud est positif et tout courant sortant est négatif ou bien la convention inverse.

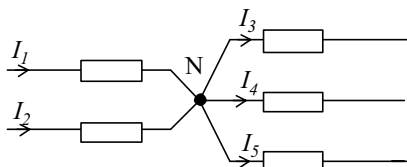


Figure 2.3 Loi des nœuds appliquée à un exemple de circuit.

$$I_1 + I_2 + (-I_3) + (-I_4) + (-I_5) = 0$$

Nous pouvons formuler la loi des nœuds autrement : La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui le quittent.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

Dans le cas général, en utilisant la notation mathématique classique concernant « la somme », si nous supposons n branches accordées à un nœud, dont n_1 branches correspondent à des courants entrants et n_2 branches correspondent à des courants

sortants, la loi des nœuds s'écrit dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad \text{Il s'agit d'une somme algébrique.}$$

Nous pouvons aussi écrire la loi des nœuds :

$$\sum_{e=1}^{n_1} I_e = \sum_{s=1}^{n_2} I_s$$

L'indice « e » est pour le courant entrant et l'indice « s » est pour le courant sortant.

2.2.2 Loi de Kirchhof des mailles

La deuxième loi de Kirchhof stipule : La somme algébrique des différences de potentiel (ou tension) le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle. Parmi ces tensions, certaines sont produites par des sources, d'autres sont produites par le passage d'un courant dans des dipôles passifs. Dans ce dernier cas, nous parlons de chutes de tensions.

Si nous prenons le cas de la figure 2.4, nous pouvons utiliser par exemple la maille ABCDEA. Dans ce cas, nous écrivons :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = U_{AA} = 0$$

où U_{ij} est la différence de potentiel entre les nœuds i et j .

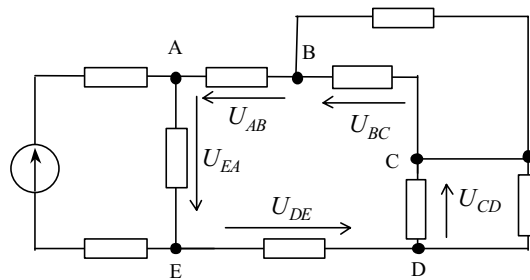


Figure 2.4 Loi des mailles appliquée à un exemple de circuit.

Dans le cas général, si nous supposons une maille qui est un contour fermé, constitué de n branches, et si nous notons ΔU_k la différence de potentiel aux bornes de la branche numéro « k », la loi des mailles s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n \Delta U_k = 0 \quad \Delta U_k \text{ est une grandeur algébrique.}$$

2.2.3 Analyse d'un réseau par les lois de Kirchhoff

Soit un réseau linéaire comportant n branches. Définir l'état de ce réseau revient à calculer les intensités des courants électriques qui circulent dans chaque branche, et la différence de potentiel entre deux nœuds quelconques. Il y a donc à calculer n intensités de branches ou n tensions de branches. Nous nous trouvons avec un système de n équations à n inconnues.

2.3 ASSOCIATIONS DE DIPÔLES

Deux dipôles sont en *série* s'ils sont parcourus par le même courant électrique (même intensité). Ils sont en *parallèle* s'ils ont une même différence de potentiel à leurs bornes. Ces définitions simples s'étendent à n dipôles ou éléments.

2.3.1 Association de résistances en série

Considérons les deux dipôles de la figure 2.5 (a), constitués par la mise en série de deux résistances. Calculons maintenant la résistance équivalente R_{eq} pour que le dipôle résultant soit équivalent aux deux précédents.

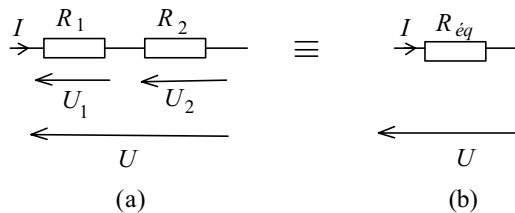


Figure 2.5 Association en série de deux résistances.

Pour le dipôle de la figure 2.5 (a), la somme des tensions le long de la branche est :

$$U = U_1 + U_2$$

où U_1 et U_2 sont les tensions aux bornes respectivement des résistances R_1 et R_2 . Or, puisque le courant I est commun aux deux résistances, nous avons :

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{et} \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

d'où

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2)I$$

La loi d'Ohm donne :

$$U = R_{\text{eq}} \cdot I$$

Pour le dipôle de la figure 2.5 (b). La résistance R_{eq} équivalente aux résistances R_1 et R_2 en série vaut donc :

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad \text{et en général :} \quad R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots R_n$$



Généralisation : La résistance équivalente à n résistances branchées en série est égale à la somme des n résistances.

2.3.2 Association de résistances en parallèle

Considérons maintenant les deux dipôles de la figure 2.6 suivants :

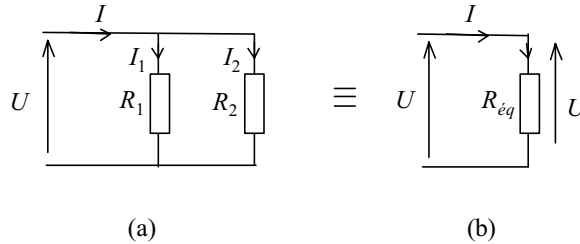


Figure 2.6 Association en parallèle de deux résistances.

Le courant I se partage en deux courants I_1 et I_2 avec :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{avec} \quad I = I_1 + I_2$$

Pour le dipôle équivalent, nous avons : $U = R_{\text{eq}} \cdot I$. La résistance R_{eq} équivalente aux résistances R_1 et R_2 en parallèle est donc telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

d'où :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_{\text{eq}}}$$



Remarque : G_{eq} est appelée *conductance équivalente* (G_1 et G_2 sont respectivement les conductances des éléments R_1 et R_2). La loi d'association des résistances ou des conductances en parallèle s'écrit :

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 \quad \text{et en général :} \quad G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$$

Généralisation : La résistance équivalente à n résistances en parallèle est une résistance R qui a une conductance G égale à la somme des conductances.

2.3.3 Association de deux générateurs de tension en série

Considérons les deux dipôles de la figure 2.7 (a), constitués par la mise en série de deux générateurs de tension. Calculons maintenant le dipôle équivalent de la figure 2.7(b) : $(E_{\text{eq}}, R_{\text{eq}})$. En appliquant la deuxième loi de Kirchhoff, la tension développée entre A et B est égale à la somme algébrique des tensions produites par

chacune des sources. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances internes des générateurs de tension.

$$E_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n E_k \quad \text{et} \quad R_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

E_k est considérée comme positive si elle a le même sens que la tension U .



Généralisation : L'association en série de n générateurs de tension de résistance interne R_k et de force électromotrice E_k est équivalente à un générateur de tension unique dont la résistance équivalente est la somme des n résistances, et la force électromotrice équivalente est la somme algébrique des tensions produites par chaque source.

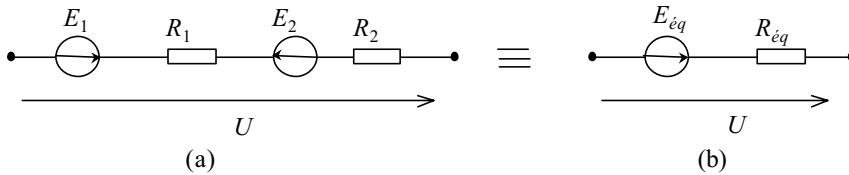


Figure 2.7 Association en série de deux sources de tensions.

2.3.4 Association de deux générateurs de courant en parallèle

Considérons les deux dipôles de la figure 2.8 (a) constitués par la mise en parallèle de deux générateurs de courant (I_1, R_1) et (I_2, R_2). Calculons maintenant le dipôle équivalent ($I_{\text{éq}}, R_{\text{éq}}$) de la figure 2.8 (b). En appliquant la première loi de Kirchhof, le courant de court-circuit est égal à la somme algébrique des courants produits par chacune des sources. La conductance équivalente est égale à la somme des conductances internes des différents générateurs de courant.

$$I_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n I_k \quad \text{et} \quad G_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n G_k$$

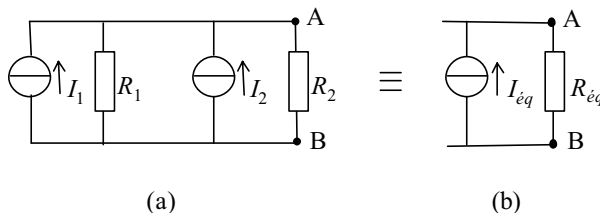


Figure 2.8 Association en parallèle de deux sources de courants.



Généralisation : L'association en parallèle de n générateurs de courant de résistances internes R_k et de courants I_k est équivalente à un générateur de courant unique, dont la conductance équivalente est la somme des n conductances et le courant équivalent est égal à la somme algébrique des courants produits par chaque source.

2.3.5 Association de deux générateurs de tension en parallèle

Supposons les deux générateurs réels de tensions de la figure 2.9 (a) que nous branchons en parallèle. À vide, le courant total I débité par les deux sources dans la charge étant nul, I_1 et I_2 sont forcément égaux en amplitude mais de signes opposés. Si l'amplitude de ces deux courants n'est pas nulle, nous pouvons nous retrouver avec une situation de perte d'énergie (échauffement dans les résistances), ce qui peut, dans certaines conditions, provoquer une destruction du circuit.

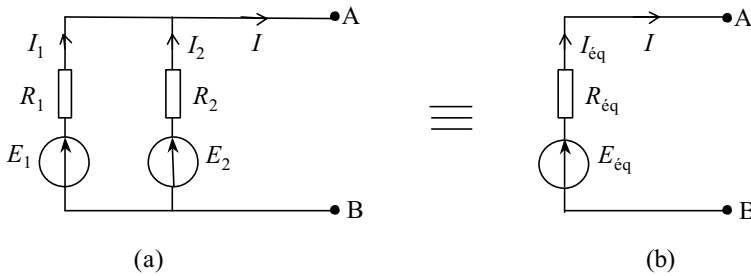


Figure 2.9 Association en parallèle de deux sources de tensions.

En pratique, exceptionnellement, nous n'associons en parallèle que des générateurs identiques d'amplitude E et de résistance interne R . Dans ce cas, nous pouvons calculer la différence de potentiel qui apparaît entre A et B.

$$U_{AB} = E - R.I_1 = E - R.I_2 \quad \text{et} \quad U_{AB} = E_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}.I_{\text{eq}} = E_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}.I$$

Puisque les deux générateurs sont identiques, ils sont traversés par le même courant :

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \quad \text{et,} \quad U_{AB} = E - R \frac{I}{2} = E - \frac{R}{2} I$$

Nous déduisons donc le générateur équivalent de la figure 2.9 (b) :

$$E_{\text{eq}} = E \quad \text{et} \quad R_{\text{eq}} = \frac{R}{2}$$

2.4 PRINCIPAUX THÉORÈMES

Nous allons présenter quelques théorèmes généraux permettant de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques en régime statique. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

2.4.1 Pont diviseur de tension

Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure 2.10.

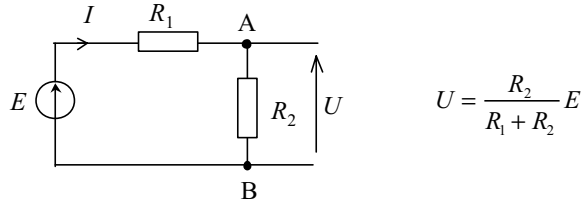


Figure 2.10 Schéma du pont diviseur de tension.

Il s'agit d'une application directe de la mise en série de deux résistances :

$$E = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I \quad \text{d'où} \quad I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

La tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse. Par exemple la tension aux bornes de la résistance R_2 vaut :

$$U = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

La tension ainsi obtenue est inférieure à E , d'où le nom donné à ce montage. Remarquons au passage, que d'une façon générale, la tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit série comportant n résistances, alimenté par une source de tension E est :

$$U_i = E \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

2.4.2 Pont diviseur de courant

Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure 2.11.

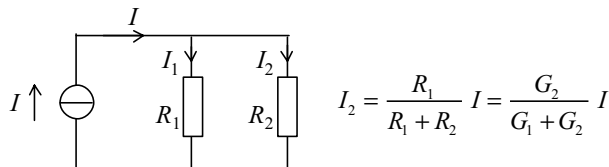


Figure 2.11 Schéma du pont diviseur de courant.

Appelons « U » la différence de potentiel qui se trouve aux bornes des différents éléments en parallèle, nous obtenons :

$$U = R_2 \cdot I_2 = I (R_1 // R_2) = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{d'où} : I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Si, maintenant, nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R_1 R_2$, nous obtenons la relation suivante :

$$I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Cette relation est maintenant sous une forme comparable à celle trouvée pour le diviseur de tension. L'intensité obtenue est toujours inférieure à I , d'où le nom donné à ce montage.



Remarque : D'une façon plus générale, le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit parallèle comportant n résistances, alimenté par une source idéale de courant I , est :

$$I_i = I \frac{G_i}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}$$

2.4.3 Théorème de superposition

Il découle directement des propriétés de linéarité. Ce théorème s'applique donc aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs.

Soit un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : $S_1, S_2, \dots, S_n$, et une grandeur à calculer, comme par exemple I_K le courant dans la branche K. Appelons $I_{K1}, I_{K2}, \dots, I_{Kn}$, les valeurs de cette grandeur créée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées.

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn}$$



Remarque 1 : Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.

Remarque 2 : Le théorème de superposition ne s'applique pas aux circuits contenant des sources liées ou dépendantes (nous disons aussi sources contrôlées) puisque ces dernières ne sont pas, par définition, des éléments linéaires.

Un générateur contrôlé est un générateur dont la valeur nominale de tension ou de courant est fixée par une grandeur électrique du réseau.

Prenons par exemple le montage de la figure 2.12 suivant, dans lequel nous calculons la tension U_{BM} .

- Si $E_2 = 0$, $U_{BM} = U_1 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.
- Si $E_1 = 0$, $U_{BM} = U_2 = E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

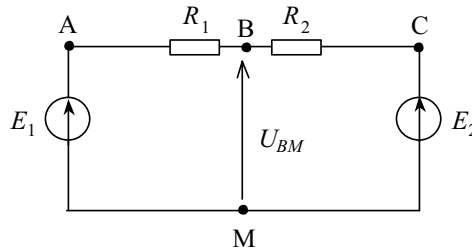


Figure 2.12 Exemple d'application du théorème de superposition.

En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2.4.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (calcul de la tension et du courant de sortie), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :

- soit sous la forme d'une source réelle de tension : c'est le modèle de Thévenin,
- soit sous la forme d'une source réelle de courant : c'est le modèle de Norton.

Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de modéliser le comportement d'un dipôle. Ces théorèmes montrent qu'indépendamment de la charge, un réseau quelconque vu entre deux de ces points peut toujours être représenté par une source réelle de tension ou par une source réelle de courant.

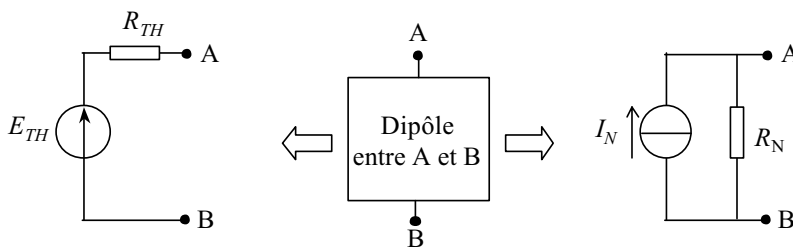


Figure 2.13 Équivalence Thévenin et Norton d'un dipôle.

a) Théorème de Thévenin

Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B), le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} .

- La valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- La résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Prenons par exemple le montage de la figure 2.14 (a) :

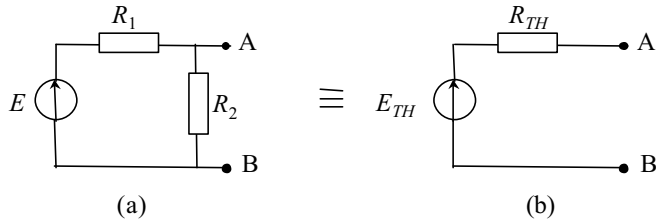


Figure 2.14 Exemple d'application du théorème de Thévenin.

La tension de Thévenin est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur.

La résistance R_{TH} est obtenue en passivant la source de tension E . Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit.

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad \text{et} \quad R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur de Thévenin équivalent est donné à la figure 2.14 (b).

b) Théorème de Norton

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N .

- La valeur I_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- La résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit à trouver :

$$R_N = R_{TH} \quad \text{et} \quad E_{TH} = R_{TH} \cdot I_{TH} = R_{TH} \cdot I_N$$

Prenons par exemple le montage de la figure 2.15 (a) :

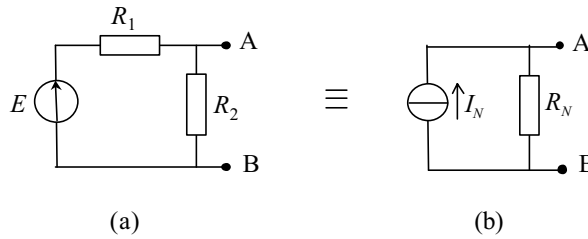


Figure 2.15 Exemple d'application du théorème de Norton.

Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2 . La résistance R_N est obtenue en passivant la source de tension E . Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit.

$$I_N = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur de courant équivalent de Norton est donné à la figure 2.15 (b).

c) Dualité Thévenin – Norton

Les schémas de Thévenin et de Norton sont des schémas équivalents, les deux dipôles présentent :

- la même tension à vide,
- le même courant de court-circuit,
- la même résistance interne.

Conformément au principe de dualité, pour trouver le schéma dual du schéma de Thévenin, nous effectuons les transformations suivantes :

- éléments en série $\Leftrightarrow$ éléments en parallèle,
- tension en volt $\Leftrightarrow$ courant en ampère,
- résistance en ohm $\Leftrightarrow$ conductance en siemen.

2.4.5 Théorème de Millman

Ce théorème donne une généralisation du théorème de superposition. Cette autre façon d'écrire la loi des nœuds permet de calculer la différence de potentiel entre un nœud N et le nœud de référence des potentiels.

Soit M un nœud du circuit choisi comme référence de potentiel $V_M = 0$. Supposons n branches connectées à un nœud N. Chaque branche constitue un dipôle vu entre le nœud N et celui de référence, ce qui permet de remplacer la branche réelle par son modèle équivalent de Thévenin.

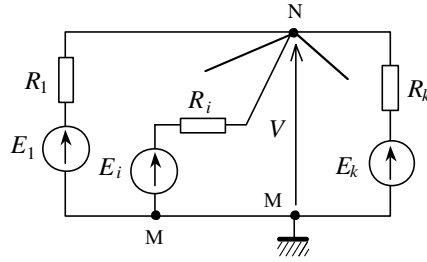


Figure 2.16 Principe du théorème de Millman.

Si nous effectuons un court-circuit entre le nœud N et le nœud de référence, le courant de court-circuit (courant de Norton) est égal à la somme des courants fournis par chaque source.

$$I_N = I_{CC} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \cdots + \frac{E_n}{R_n}$$

Lorsque nous passivons les sources de tension, toutes les résistances se trouvent en parallèle ; la conductance équivalente est égale à la somme des conductances de chaque source.

Le théorème de Millman stipule que la tension mesurée au nœud N est donc égale au produit de la résistance équivalente par la valeur de la source de courant, soit :

$$V_N = \frac{\sum_{i=1}^n E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3 + \cdots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n}$$

$$V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \cdots + \frac{E_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

2.4.6 Théorème de substitution

Lorsque nous connaissons la différence de potentiel U_{AB} qui existe entre deux points quelconques d'un réseau électrique, nous ne changeons rien à l'état électrique du reste du réseau si nous remplaçons cette chute de tension et la partie du réseau qui lui donne naissance par une source de tension idéale qui délivre une tension égale à U_{AB} .

De même, lorsque nous connaissons le courant I_{AB} qui circule dans une branche quelconque notée AB d'un réseau électrique, nous ne changeons rien à l'état électrique du reste du réseau, si nous remplaçons cette branche par une source idéale de courant qui délivre un courant I_{AB} .

La figure 2.17 illustre ce théorème en utilisant soit un diviseur de tension, soit un diviseur de courant.

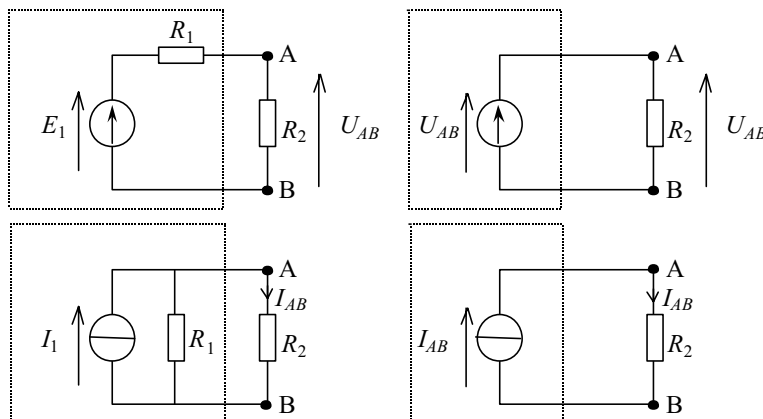


Figure 2.17 Exemples d'application du théorème de substitution en utilisant le pont diviseur de tension et le pont diviseur de courant.

2.4.7 Théorème de réciprocité

Soient deux branches i et j d'un réseau passif. Si le fait de placer une source idéale de tension E dans la branche i produit un courant I_j dans la branche j , alors la même source de tension E placée dans la branche j produira un courant I_i dans la branche i égal à I_j : $I_i = I_j$.

Le principe de ce théorème est présenté à la figure 2.18 Le réseau passif peut être inconnu et représenté par une « boîte noire ».

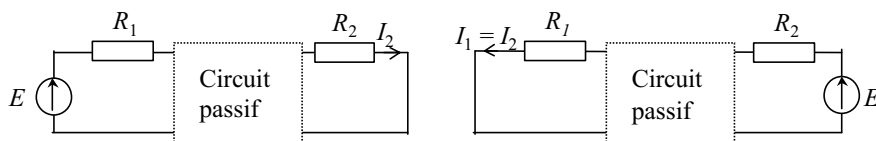


Figure 2.18 Illustration du théorème de réciprocité.



Remarque : Ce théorème ne s'applique qu'aux réseaux linéaires passifs, qui ne contiennent aucun élément actif (transistor, amplificateur opérationnel...).

2.4.8 Théorème de Kennelly

Ce théorème permet de transformer le schéma d'un réseau en « π » en un schéma en « T » qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation *triangle-étoile*.

Considérons trois nœuds d'un réseau électrique notés A, B et C. S'ils sont reliés deux à deux par des éléments formant une seule branche, il s'agit d'un montage triangle (ou en π) donné à la figure 19 (a).

Par contre si les trois branches auxquelles appartiennent les trois nœuds sont reliées à un nœud commun, le montage a une structure d'étoile comme indiqué à la figure 2.19 (b).

Pour que ces deux structures soient équivalentes, elles doivent présenter la même réponse lorsqu'elles sont alimentées dans les mêmes conditions ; autrement dit elles doivent présenter la même résistance.

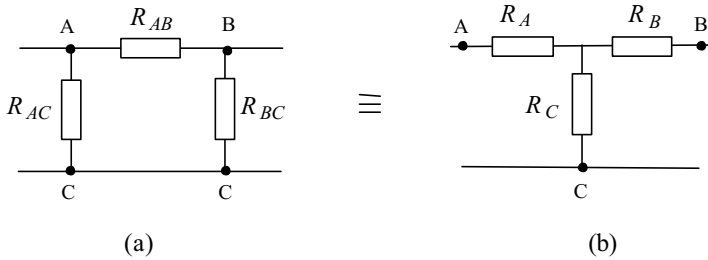


Figure 2.19 Transformation triangle-étoile et vice versa.

Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre la structure étoile et la structure triangle. L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points A – B, A – C et B – C.

Si nous court-circuitons les points B et C, la résistance vue entre A et B est :

- dans le montage triangle : R_{AC} en parallèle à R_{AB} ,
- dans le montage étoile : R_A en série avec l'ensemble R_B et R_C en parallèle,

L'équivalence entre les deux montages s'écrit :

$$R_{AB} // R_{AC} = R_A + (R_B // R_C)$$

soit en passant aux conductances pour le montage en π :

$$G_{AB} + G_{AC} = \frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

De même, en court-circuitant les bornes A et C, nous obtenons :

$$G_{AB} + G_{BC} = \frac{R_A + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Et enfin en court-circuitant les bornes A et B, nous obtenons :

$$G_{AC} + G_{BC} = \frac{R_A + R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

En combinant les trois relations précédentes et en revenant aux résistances, nous obtenons :

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC ou AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

- entre B et C : $R_{BC} // (R_{AB} + R_{AC}) = R_B + R_C$;
- entre A et C : $R_{AC} // (R_{AB} + R_{BC}) = R_A + R_C$;
- entre A et B : $R_{AB} // (R_{AC} + R_{BC}) = R_A + R_B$.

En combinant ces trois équations, nous obtenons :

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \quad , \quad R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \quad \text{et} \quad R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

2.5 MÉTHODES D'ANALYSE

D'après ce qui précède, nous disposons, une fois précisés les sens des courants et les sens des tensions, des lois et théorèmes suivants :

- la loi d'Ohm,
- la loi des nœuds,
- la loi des mailles,
- les autres théorèmes simples cités plus haut.

Mais dès que le réseau est un peu compliqué, il est parfois difficile d'appliquer ces théorèmes. Plusieurs méthodes d'analyse facilitent alors la résolution du problème :

- la méthode générale des mailles et des courants,
- la méthode des mailles indépendantes,
- la méthode des nœuds.

2.5.1 Rappels de mathématiques

Nous rappelons les méthodes de résolution d'un système de n équations à n inconnues. Le principe de chaque méthode sera donné pour un système de deux équations à deux inconnues.

a) Méthode de substitution

Soit le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad \text{par exemple : } 7 = 5x + 2y$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad \text{par exemple : } 3 = 4x - y$$

- Nous cherchons l'expression littérale d'une des inconnues ; nous pouvons utiliser dans notre exemple, la deuxième équation qui donne : $y = 4x - 3$
- Nous substituons l'expression trouvée dans les autres équations pour ne garder qu'un nombre $n - 1$ d'équations.
- Nous répétons la même procédure pour obtenir une seule équation à une seule inconnue.

Dans notre exemple nous obtenons :

$$5x + 2(4x - 3) = 7 \quad \text{soit : } x = 1$$

Les changements de variables successifs permettent de remonter aux valeurs des autres inconnues, ce qui donne dans notre exemple :

$$y = 4x - 3 = 1$$

b) Méthode de Cramer

Considérons le même système que précédemment :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad \text{par exemple : } 7 = 5x + 2y$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad \text{par exemple : } 3 = 4x - y$$

Le système de n équations à n inconnues peut être écrit sous forme matricielle. Chaque inconnue est obtenue directement en effectuant la division entre le déterminant D_N de la matrice $[M_N]$ et le déterminant D_D de la matrice $[M_D]$.

$[D_M]$ est la matrice obtenue avec les coefficients des inconnues et $[D_N]$ est la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de cette inconnue par les éléments du second membre.

Nous obtenons dans notre exemple :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{[(7) \times (-1)] - [(2) \times (3)]}{[(5) \times (-1)] - [(2) \times (4)]} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{[(5) \times (3)] - [(4) \times (7)]}{[(5) \times (-1)] - [(2) \times (4)]} = 1$$

2.5.2 Méthode générale

Un réseau électrique quelconque qui comporte « B » branches, est parfaitement déterminé si nous connaissons à tout instant :

- les B courants qui circulent dans les branches,
- les B tensions aux bornes de ces branches.

L'analyse d'un réseau électrique consiste donc à déterminer ces deux B grandeurs électriques. Il va de soi que ces deux B grandeurs ne sont pas indépendantes puisque la connaissance d'une grandeur donne, d'après la loi d'Ohm, l'autre grandeur. Nous cherchons donc à déterminer soit les courants, soit les tensions.

Les B grandeurs étant choisies, le comportement du réseau est décrit par un système de B équations linéaires. Pour cette méthode nous appliquons les lois de Kirchhoff autant de fois qu'il est nécessaire pour relier les B inconnues aux B équations.

Soit le réseau de la figure 2.20 qui comporte 8 branches. Il est donc décrit par un système de 8 équations à 8 inconnues. Supposons que nous souhaitons déterminer les courants qui circulent dans les différentes branches, les inconnues du système sont alors les courants.

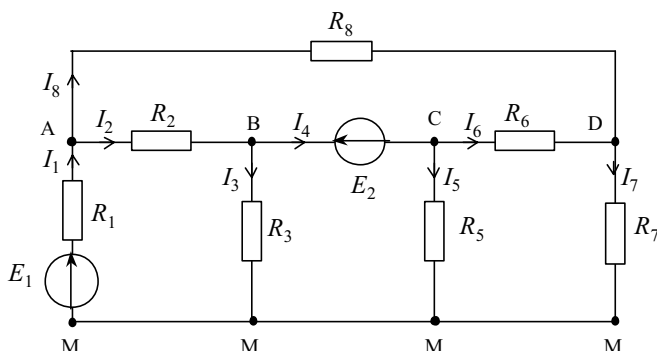


Figure 2.20 Exemple d'un circuit complexe à calculer.

Nous pouvons (*mais ce n'est pas conseillé*) écrire les lois de Kirchhoff sans ordre préétabli afin de déterminer les 8 équations. En effet, dans le cas de notre exemple si nous appliquons la loi des mailles pour ABMA, BCMB, CDMC et ABCDA et la loi

des nœuds pour les points A, B, C et D, nous obtenons la matrice $[M]$ suivante :

$$[M] = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & R_6 & R_7 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & -R_6 & 0 & R_8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice trouvée est d'un rang relativement élevé. Ce rang peut être abaissé si nous nous contentons des quatre relations déduites des lois des mailles et si nous introduisons d'une façon judicieuse les substitutions des courants. Nous obtenons ainsi la matrice $[M']$:

$$[M'] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & -R_2 - R_3 \\ -R_2 & 0 & -R_6 & R_2 + R_6 + R_8 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 & R_5 - R_6 \\ R_3 & -R_3 - R_5 & R_5 & R_5 - R_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} I_2 = I_1 - I_8 \\ I_3 = I_1 - I_4 - I_8 \\ I_5 = I_4 - I_7 - I_8 \\ I_6 = I_7 - I_8 \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ce système d'équation en utilisant par exemple la méthode de Cramer. Nous obtenons facilement les autres inconnues I_2 , I_3 , I_5 et I_6 en utilisant les relations de substitution précédentes.



Remarque : Cette méthode, en apparence facile à utiliser, nécessite un choix judicieux des équations de substitution qui ne doivent pas être prises au hasard. Dans un cas complexe, cette méthode présente des difficultés réelles et plusieurs tâtonnement peuvent s'avérer nécessaires avant d'aboutir au résultat.

Les deux méthodes qui vont suivre présentent l'avantage d'être systématiques et s'appliquent pour tous les réseaux plans. Ces méthodes dites des mailles indépendantes ou des nœuds indépendants font intervenir les notions de mailles ou de courants virtuels.

2.5.3 Méthodes des mailles et des courants indépendants

a) Définitions

Considérons un circuit électrique, comportant B branches et N nœuds.

► Nœuds indépendants

Si un réseau comporte un nombre N de nœuds, l'un des nœuds peut servir comme référence. Le réseau comporte donc $N - 1$ nœuds indépendants, ce qui se traduit par $N - 1$ potentiels à déterminer.

► Mailles adjacentes

Deux mailles sont adjacentes si elles sont extérieures l'une par rapport à l'autre et n'ont en commun qu'une branche.

► Mailles indépendantes

Une maille est dite indépendante si une ou plusieurs branches lui appartiennent exclusivement. La maille indépendante est forcément adjacente à au moins une autre maille. Dans ce cas, si un réseau comporte N nœuds et B branches, il comporte alors M mailles indépendantes :

$$M = B - (N - 1)$$

► Courants virtuels

Le courant de maille ou courant virtuel est le courant *fictif* qui circule dans toutes les branches constituant la maille. Il s'ensuit la remarque très importante suivante : Un élément commun à deux mailles indépendantes est parcouru par deux courants virtuels différents selon que nous considérons l'une ou l'autre des mailles.

Prenons l'exemple de la figure 2.21 qui représente un circuit comportant 5 nœuds notés A, B, C, D et M. Ce dernier nœud est pris comme référence de potentiel $U_M = 0$. Ce réseau comporte donc quatre ($4 = N - 1$) nœuds indépendants A, B, C et D.

Ce réseau qui contient 8 branches, comporte alors M mailles indépendantes, avec : $M = B - (N - 1)$. Autrement dit, ce réseau comporte 4 mailles indépendantes qui sont : ABMA, BCMB, CDMC et ABCDA. Nous trouvons donc 4 courants virtuels notés I_a , I_b , I_c et I_d . Cet exemple nous permet d'en déduire les remarques suivantes :

- le courant dans une branche indépendante est égal au courant de maille ;
- le courant dans une branche commune à deux mailles est égal à la somme algébrique des deux courants de maille ; par exemple : $I_3 = I_a + I_b$.

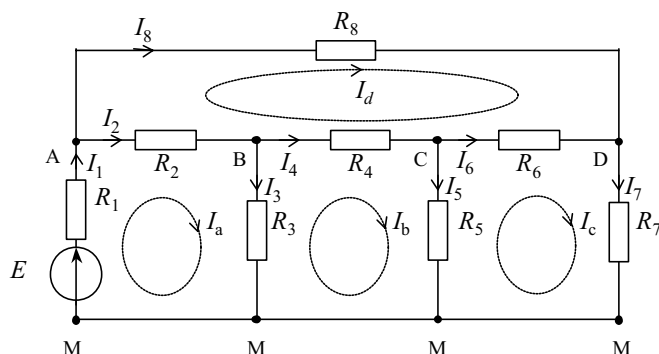


Figure 2.21 Exemple d'un circuit complexe avec courants virtuels.

b) Méthodes des mailles adjacentes

► Réseau électrique sans source de courants

Cette méthode, appelée aussi méthode des courants indépendants, est issue de la première loi de Kirchhoff et s'applique de préférence aux réseaux qui comportent des éléments en série alimentés par des *générateurs de tension*. Nous supposons donc que le réseau électrique ne contient aucune source de courant.

Soit une maille comportant plusieurs branches en série. La branche j comporte des résistances R_j , des générateurs et des récepteurs E_j et est parcourue par un courant I_j .

Nous prenons comme courants indépendants les courants fictifs (virtuels) dits courants de mailles $I_a, I_b, \dots$; nous pouvons choisir par exemple le sens positif, celui qui correspond au sens horaire. Nous pouvons constater qu'une branche est parcourue :

- par un seul courant de maille s'il s'agit d'une branche périphérique ;
- par deux courants de mailles de sens opposés, s'il s'agit d'une branche qui appartient à deux mailles adjacentes.

Les courants de mailles étant définis, nous pouvons exprimer alors tous les courants de branches en fonction de courants des mailles. Nous pouvons utiliser un tableau récapitulatif. Nous trouverons dans le cas particulier de la figure 2.21 :

Tableau 2.1 Tableau récapitulatif des correspondances entre les courants.

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
I_a	+1	+1	+1					
I_b			-1	+1	+1			
I_c					-1	+1	+1	
I_d		-1		-1		-1		+1

Les courants des branches périphériques s'expriment en fonction d'un seul courant de maille. Dans les autres colonnes, nous trouvons toujours les deux coefficients $+1$ et -1 .

Pour les générateurs et récepteurs polarisés, E_j est comptée algébriquement avec le *signe* de la borne de laquelle nous sortons dans le sens de parcours conventionnel. Dans le cas des récepteurs non polarisés, nous choisissons arbitrairement une polarité et nous procédons comme pour les récepteurs polarisés. Lorsque le calcul est terminé, nous devons vérifier que le courant circule dans le récepteur dans le sens positif de la tension.

Dans cette méthode, les inconnues sont les courants de branches. Si nous prenons un réseau contenant N nœuds et B branches, ce réseau comporte toujours M mailles indépendantes où : $M = B - (N - 1)$.

Le tableau précédent fournit donc $N - 1$ équations de réseau, soit 4 équations. Or, il faut trouver 8 ($B = 8$) équations pour calculer les 8 courants de branches. Il reste donc à déterminer 4 ($M = 4$) courants de mailles. Le nombre d'équations à écrire pour connaître l'état du réseau est donc égal à M .

La résolution s'effectue en écrivant la loi de Kirchhoff des tensions pour chacune des mailles, ce qui donne les M équations restantes. Nous obtenons ainsi les 8 ($B = 8$) équations à 8 inconnues du circuit électrique.

Nous prenons donc dans le cas de l'exemple de la figure 2.21, les 4 mailles indépendantes ABMA, BCMB, CDMC et ABCDA. L'application de la loi de Kirchhoff aux quatre mailles donne :

$$\begin{cases} R_1 I_a + R_2 I_a - R_2 I_d + R_3 I_a - R_3 I_b = +E \\ -R_3 I_a + R_3 I_b + R_4 I_b - R_4 I_d + R_5 I_b - R_5 I_c = 0 \\ -R_5 I_b + R_5 I_c + R_6 I_c - R_6 I_d + R_7 I_c = 0 \\ R_8 I_d + R_6 I_d - R_6 I_c + R_4 I_d - R_4 I_b + R_2 I_d - R_2 I_a = 0 \end{cases}$$

Les quatre équations peuvent se mettre sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & -R_2 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 & -R_4 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 & -R_6 \\ -R_2 & -R_4 & -R_6 & R_2 + R_4 + R_6 + R_8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons remarquer que E apparaît une seule fois dans la matrice précédente. Ceci s'explique par le fait que E appartient à une branche périphérique. Mais si une source appartient à une branche commune à deux mailles, cette source apparaît deux fois avec des signes opposés.

La matrice carrée ainsi obtenue représente la matrice résistance des mailles (matrice impédance dans le cas général). Elle possède les propriétés suivantes :

- elle est symétrique,
- seuls les termes de sa diagonale principale sont positifs,
- la dernière matrice colonne est la matrice des sources. Le signe + est affecté à la source si le courant de la maille entre par le pôle positif de la source.

La solution finale du problème s'obtient en inversant la matrice résistance et en calculant les courants des mailles.

$$[I] = [R]^{-1} \times [E]$$

Nous cherchons à calculer l'inverse de la matrice. Pour cela, nous calculons le déterminant de la matrice précédente en posant :

$$[\text{matrice } R] = \begin{bmatrix} R_{\text{eq1}} & -R_3 & 0 & -R_2 \\ -R_3 & R_{\text{eq2}} & -R_5 & -R_4 \\ 0 & -R_5 & R_{\text{eq3}} & -R_6 \\ -R_2 & -R_4 & -R_6 & R_{\text{eq4}} \end{bmatrix}$$

Les résistances équivalentes sont :

$$\begin{aligned} R_{\text{eq1}} &= R_1 + R_2 + R_3 \quad , \quad R_{\text{eq2}} = R_3 + R_4 + R_5, \\ R_{\text{eq3}} &= R_5 + R_6 + R_7 \quad , \quad R_{\text{eq4}} = R_2 + R_4 + R_6 + R_8 \end{aligned}$$

Le déterminant est :

$$\Delta = R_{\text{eq1}} \cdot R_{\text{eq2}} \cdot R_{\text{eq3}} \cdot R_{\text{eq4}} + 2R_2 \cdot R_3 \cdot R_5 \cdot R_6 - R_2^2 \cdot R_5^2 - R_4^2 \cdot R_{\text{eq1}} \cdot R_{\text{eq3}} - R_3^2 \cdot R_6^2$$

La matrice des cofacteurs est :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Les valeurs des m_{ij} sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_{11} &= R_{\text{eq2}} \cdot R_{\text{eq3}} \cdot R_{\text{eq4}} - 2R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 - R_4^2 \cdot R_{\text{eq3}} - R_5^2 \cdot R_{\text{eq4}} - R_6^2 \cdot R_{\text{eq2}} \\ m_{11} &= R_{\text{eq2}} R_{\text{eq3}} R_{\text{eq4}} - 2R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 - R_4^2 \cdot R_{\text{eq3}} - R_5^2 \cdot R_{\text{eq4}} - R_6^2 \cdot R_{\text{eq2}} \\ m_{11} &= R_{\text{eq2}} \cdot R_{\text{eq3}} \cdot R_{\text{eq4}} - 2R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 - R_4^2 \cdot R_{\text{eq3}} - R_5^2 \cdot R_{\text{eq4}} - R_6^2 \cdot R_{\text{eq2}} \\ m_{11} &= R_{\text{eq2}} \cdot R_{\text{eq3}} \cdot R_{\text{eq4}} - 2R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 - R_4^2 \cdot R_{\text{eq3}} - R_5^2 \cdot R_{\text{eq4}} - R_6^2 \cdot R_{\text{eq2}} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc déduire la matrice des courants :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La connaissance des courants de mailles I_a , I_b , I_c et I_d permet de trouver les différents courants qui circulent dans les différentes branches. Le tableau 2.2 nous donne les résultats suivants :

Tableau 2.2 Tableau récapitulatif des courants.

$I_1 = I_a = m_{11}E$	$I_2 = I_a - I_d = (m_{11} - m_{14})E$
$I_3 = I_a - I_b = (m_{11} - m_{12})E$	$I_4 = I_b - I_d = (m_{12} - m_{14})E$
$I_5 = I_b - I_c = (m_{12} - m_{13})E$	$I_6 = I_c - I_d = (m_{13} - m_{14})E$
$I_7 = I_c = m_{13}E$	$I_8 = I_d = m_{14}E$

► Réseau électrique avec sources de courants

Lorsqu'une branche contient une source de courant, nous ne pouvons écrire la loi de Kirchhoff des tensions pour une maille. En effet, la tension aux bornes d'une source de courant est indéterminée.

Dans ce cas, il faut modifier le dessin du circuit de façon à placer la branche contenant la source de courant comme une branche périphérique, ce qui implique un autre choix des courants de mailles. La suite du calcul se fait de la même façon que précédemment.



Remarque : Si la source de courant se trouve en parallèle avec une résistance, la première méthode reste valable. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de Thévenin pour convertir la source de courant en parallèle avec la résistance en une source de tension en série avec la résistance.

c) Méthodes des nœuds indépendants

► Réseau électrique sans sources de tensions

Cette méthode, aussi appelée méthode des potentiels, est la réciproque de la méthode des mailles adjacentes. Issue de la deuxième loi de Kirchhoff, elle s'adapte bien aux circuits qui contiennent des sources de courants. Nous supposons donc que le réseau électrique ne contient aucune source de tension. Nous présentons la théorie

appliquée à l'exemple du circuit de la figure 2.22 qui comporte B ($B = 8$) branches et N ($N = 5$) nœuds.

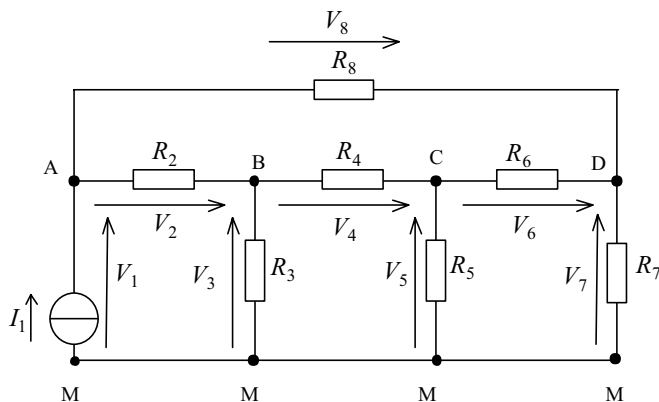


Figure 2.22 Exemple de circuit avec sources de courants.

Supposons que l'on choisisse le potentiel du nœud M comme référence. Les potentiels des nœuds A, B, C et D sont appelés *tensions auxiliaires*, notées : V_A , V_B , V_C et V_D .

Les tensions des branches reliées aux nœuds de référence étant définies, nous pouvons exprimer alors toutes les tensions des branches en fonction des tensions auxiliaires. Par exemple dans un tableau récapitulatif (tableau 2.2). Nous trouverons dans le cas particulier de la figure 2.22 :

Tableau 2.3 récapitulatif des correspondances entre les tensions.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
V_A	+1	-1						-1
V_B		+1	+1	-1				
V_C				+1	+1	-1		
V_D						+1	+1	+1

Ce tableau fournit donc 8 relations entre les tensions que nous cherchons et les tensions auxiliaires. Il faut déterminer 4 ($N - 1 = 4$) relations pour déterminer les quatre tensions auxiliaires ou tensions indépendantes.

Nous pouvons écrire qu'en chaque nœud, la somme algébrique des courants est nulle. Dans ce cas, afin de faciliter le calcul, nous préférons utiliser les conductances au lieu des résistances.

Au nœud A : $-G_2(V_B - V_A) - G_8(V_D - V_A) = I_1$

Au nœud B : $G_2 (V_B - V_A) + G_3 V_B - G_4 (V_C - V_B) = 0$

Au nœud C : $G_4 (V_C - V_B) + G_5 V_C - G_6 (V_D - V_C) = 0$

Au nœud D : $G_6 (V_D - V_C) + G_7 V_D + G_8 (V_D - V_A) = 0$

Si d'autres sources de courant se trouvent dans le circuit, il suffit de les additionner aux courants des nœuds. Les quatre équations peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} G_2 + G_8 & -G_2 & 0 & -G_8 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 + G_6 & -G_6 \\ -G_8 & 0 & -G_6 & G_6 + G_7 + G_8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme pour la méthode des mailles adjacentes, nous pouvons remarquer que I_1 apparaît une seule fois dans la matrice précédente. Ceci s'explique par le fait que E appartient à une branche périphérique. En revanche, si une source appartient à une branche commune à deux mailles, cette source apparaît deux fois avec des signes opposés.

La matrice carrée ainsi obtenue représente la matrice conductance (matrice admittance dans le cas général) des nœuds. Elle possède les propriétés suivantes :

- elle est symétrique,
- seuls les termes de sa diagonale principale sont positifs,
- la dernière matrice colonne est la matrice des sources. Le signe + est affecté à la source si le courant sort du nœud.

La solution finale du problème s'obtient en inversant la matrice conductance et en calculant les tensions auxiliaires :

$$[V] = [G]^{-1} \times [I]$$

Nous calculons l'inverse de la matrice, puis à l'aide du tableau récapitulatif des tensions, nous pouvons déterminer V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , V_6 , V_7 , et V_8 , en fonction de V_A , V_B , V_C , et V_D .

► Réseau électrique avec sources de tension

Lorsqu'une branche contient une source de tension, nous ne pouvons écrire la loi de Kirchhoff des courants pour un nœud. En effet, le courant qui traverse une source de tension est indéterminé.

Dans ce cas, il faut modifier le choix du nœud de référence, de façon à ce que la source de tension figure dans une branche reliée au nouveau nœud de référence. La suite du calcul se fait de la même façon que précédemment.



Remarque : Si la source de tension se trouve en série avec une résistance, la première méthode reste valable. En effet il suffit d'appliquer le théorème de Norton pour convertir la source réelle de tension en une source de courant en parallèle avec la résistance.

2.6 PUISSANCE ET ÉNERGIE

Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur qui l'accepte. Considérons le réseau élémentaire constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_U .

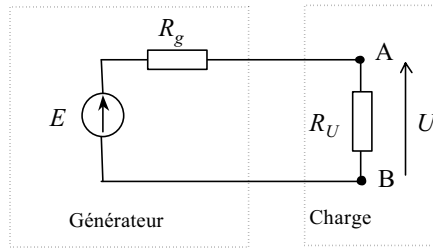


Figure 2.23 Source de tension chargée par une résistance R_U .

En vertu du principe de la conservation de l'énergie, la puissance fournie par le générateur P_f est égale à la somme des puissances dissipées par toutes les résistances du circuit. Si nous appelons I l'intensité du courant électrique circulant dans cette maille, la puissance fournie par le générateur est égale à :

$$P_f = E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R_U \cdot I^2 = (R_g + R_U) I^2$$

Le dernier terme de l'expression précédente reflète la puissance utile P_U dissipée par la charge R_U , c'est donc la puissance que lui a transmise le générateur. Il va de soi que cette puissance est toujours inférieure à P_f . La différence entre la puissance transmise et la puissance fournie représente les pertes dans la résistance interne du générateur.

Comment faut-il choisir R_U vis-à-vis de R_g pour que la puissance transmise soit maximale ?

Nous cherchons la valeur optimale de la résistance d'utilisation $R_{U(opt)}$. Pour cela, calculons la puissance P_U en fonction de R_g :

$$P_U = R_U \cdot I^2 = R_U \left(\frac{E}{R_g + R_U} \right)^2$$

Étudions la loi de variation de la puissance en calculant sa dérivée :

$$\frac{dP_U}{dR_U} = \frac{E^2 (R_g + R_U)^2 - E^2 \cdot R_U (2R_g + 2R_U)^2}{(R_g + R_U)^4} = \frac{E^2 (R_g + R_U) \times (R_g + R_U - 2R_U)}{(R_g + R_U)^4}$$

La puissance transmise est maximale (en mathématiques, nous disons que la courbe passe par un extremum) lorsque cette dérivée s'annule, c'est à dire pour $R_U = R_g$. Elle vaut alors :

$$P_{U(\max)} = \frac{E^2 \cdot R_U}{(R_g + R_U)^2} = \frac{E^2}{4R_g^2}$$

L'énergie transmise pendant une durée de temps T est égale à : $W = P \cdot T$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

► La loi des nœuds stipule que : la somme algébrique des intensités des courants arrivant à un nœud est nulle : $\sum_{k=1}^n I_k = 0$, ce qui donne aussi :

$$\sum_{e=1}^{n_1} I_e = \sum_{s=1}^{n_2} I_s \quad \text{l'indice "e" pour entrant et l'indice "s" pour sortant}$$

► La loi des mailles stipule que : la somme algébrique des différences de potentiel (ou tension) le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle.

$$\sum_{k=1}^n \Delta U_k = 0 \quad \Delta U_k \text{ est une grandeur algébrique}$$

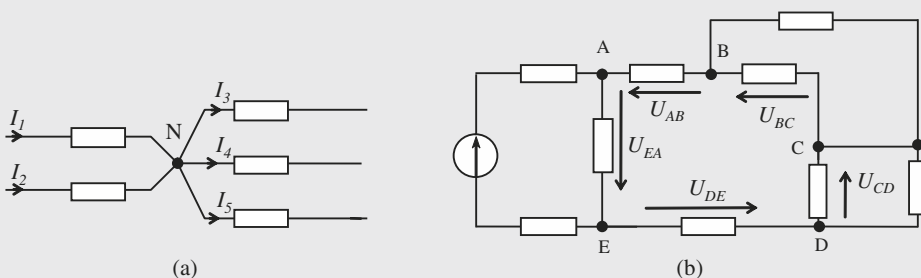


Figure 2.24 Loi des nœuds (a) et loi des mailles (b).

► La résistance équivalente à n résistances branchées en série est égale à la somme des n résistances : $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots R_n$.

► La résistance équivalente à n résistances en parallèle est une résistance R qui a une conductance G égale à la somme des conductances : $G_{\text{éq}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$.

► L'association en série de n générateurs de tension de résistance interne R_k et de force électromotrice E_k est équivalente, à un générateur de tension $E_{\text{éq}}$ et de résistance $R_{\text{éq}}$:

$$E_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n E_k \quad \text{et} \quad R_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

► L'association en parallèle de n générateurs de courant de résistance interne R_k et de courant I_k est équivalente, à un générateur de courant $I_{\text{éq}}$ et de conductance $G_{\text{éq}}$:

$$I_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n I_k \quad \text{et} \quad G_{\text{éq}} = \sum_{k=1}^n G_k$$

► La tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit série comportant n résistances, alimenté par une source de tension E est :

$$U_i = E \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}, \quad \text{dans le cas de la figure, on a :} \quad U = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

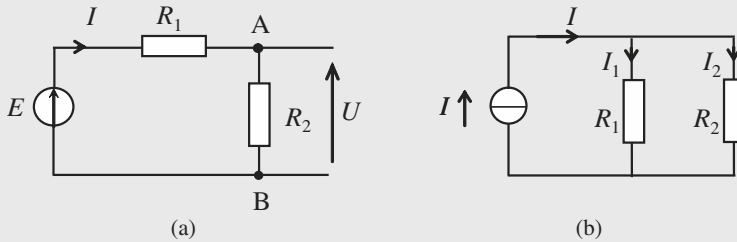


Figure 2.25 Pont diviseur de tension à deux résistances (a) et pont diviseur de courant (b).

► Le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit parallèle comportant n résistances, alimenté par une source idéale de courant I , est :

$$I_i = I \frac{G_i}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n},$$

dans le cas de la figure, on a : $I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2}$

► Dans un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de tension et de courant le courant I_K dans la branche K (ou la tension) est :

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn}$$

$I_{K1}, I_{K2}, \dots, I_{Kn}$ sont les valeurs créées individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées (remplacés par leur résistance interne).

► Un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} .

E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide et R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées. Dans le cas de la figure, on a :

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad \text{et} \quad R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

► Un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B, peut être remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N .

I_N est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée) et R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées. Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit à trouver :

$$R_N = R_{TH} \quad \text{et} \quad E_{TH} = R_{TH} \times I_{TH} = R_{TH} \times I_N$$

► Soit M choisi comme référence de potentiel $V_M = 0$. Supposons n branches connectées à un nœud A. On a :

$$V_N = \frac{\sum_{i=1}^n E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3 + \dots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \dots + \frac{E_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

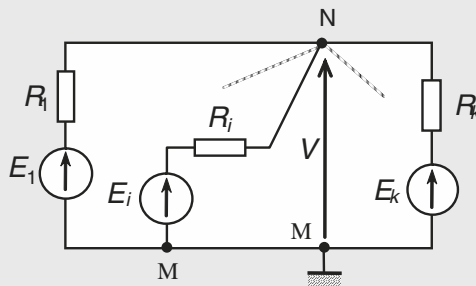


Figure 2.26 Principe du théorème de Millman.

EXERCICES

Exercice 2.1 *Calcul de la résistance équivalente d'un circuit complexe*

Soit le montage de la figure 2.27.

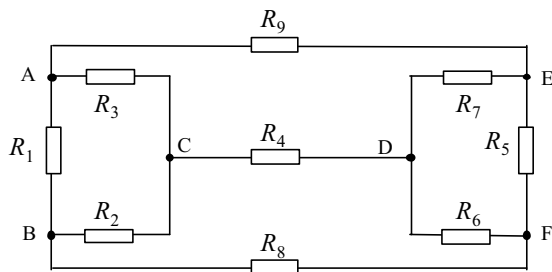


Figure 2.27 Circuit électrique comportant 9 résistances.

Déterminer la résistance équivalente entre les points A et E.

Application numérique : $R_1 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = R_7 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_6 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_8 = R_9 = 8 \text{ k}\Omega$.

Solution

Nous constatons que A, B, C d'une part et D, E, F d'autre part forment deux circuits triangles. Comme nous l'avons présenté à la figure 2.28, nous commençons par transformer le triangle ABC en son équivalent étoile. Pour cela, nous appelons M le nœud des trois branches MA, MB et MC.

Nous transformons aussi le triangle DEF en son équivalent étoile. Pour cela nous appelons N le nœud des trois branches ND, NE et NF.

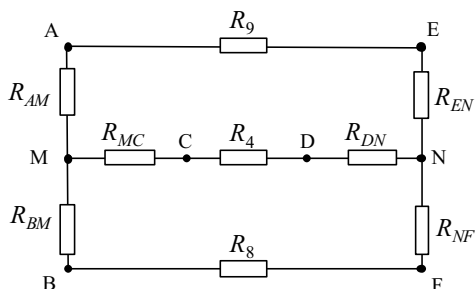


Figure 2.28 Schéma après transformation triangle-étoile.

Les expressions des différentes résistances ainsi que leurs applications numériques sont :

$$R_{AM} = \frac{R_1.R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 0,6 \text{ k}\Omega$$

$$R_{BM} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \times 10^3 \times 5 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_{CM} = \frac{R_2.R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \times 10^3 \times 5 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

Par symétrie, nous pouvons déduire les valeurs de R_{ND} , R_{NE} et R_{NF} :

$$R_{NE} = 0,6 \text{ k}\Omega \quad , \quad R_{NF} = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_{ND} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

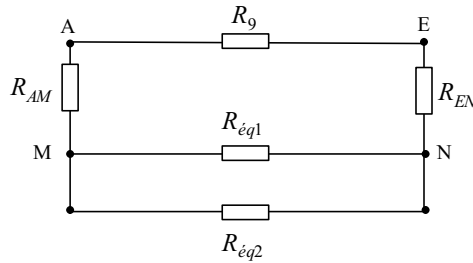


Figure 2.29 Schéma du circuit après simplification.

Entre les points M et N, nous avons une première branche constituée de la mise en série de trois résistances : R_{MC} , R_4 et R_{DN} .

Soit :

$$R_{eq1} = R_{MC} + R_4 + R_{DN} = 4 \text{ k}\Omega$$

Nous trouvons aussi une autre branche constituée de la mise en série de trois résistances : R_{BM} , R_8 et R_{NF} .

Soit :

$$R_{eq2} = R_{BM} + R_8 + R_{NF} = 10,5 \text{ k}\Omega$$

Finalement, entre A et B, nous avons une résistance totale :

$$R_{eq3} = \frac{R_{eq1}R_{eq2}}{R_{eq1} + R_{eq2}} + R_{AM} + R_{EN} = 3,74 \text{ k}\Omega$$

Exercice 2.2 Application du théorème de Thévenin sur un circuit simple

Soit les montages de la figure 2.30.

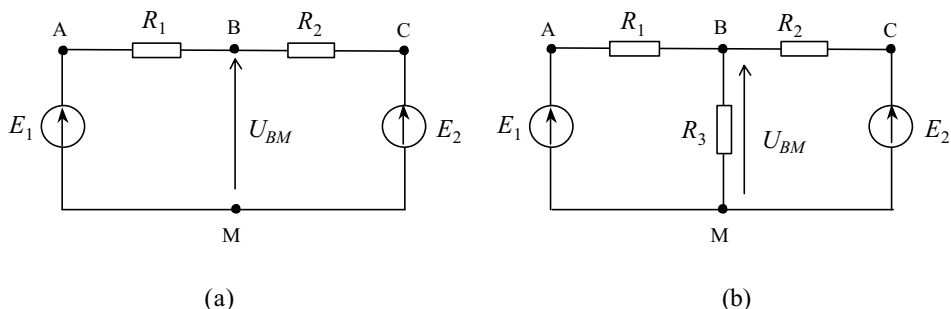


Figure 2.30 Montage simple à deux sources de tension.

1. Déterminer pour la figure 2.30 (a) les éléments du générateur équivalent de Thévenin vu des points B et M. En déduire les éléments du générateur équivalent de Norton.
2. En déduire la différence de potentiel U_{BM} dans le cas de la figure 2.30 (b).

Application numérique :

$$R_1 = 3 \text{ k}\Omega, R_2 = 6 \text{ k}\Omega, R_3 = 10 \text{ k}\Omega, E_1 = 20 \text{ V} \text{ et } E_2 = 10 \text{ V}$$

Solution

1. À vide nous pouvons par exemple appliquer le théorème de superposition. Dans ce cas, lorsque la source E_2 est court-circuitée (passivée), puisque la sortie est ouverte, aucun courant ne peut circuler dans la résistance R_3 . Le schéma du montage devient celui de la figure 2.31 (a) : la source de tension E_1 donne en sortie une différence de potentiel U_{BM1} ; de même, lorsque la source E_1 est court-circuitée, le schéma du montage devient celui de la figure 2.31 (b) : E_2 donne en sortie une différence de potentiel U_{BM2} :

$$U_{BM1} = E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad U_{BM2} = E_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La tension de Thévenin équivalente devient :

$$E_{TH} = U_{BM1} + U_{BM2} = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 16,66 \text{ V}$$

Lorsque les deux sources sont passivées, $E_1 = E_2 = 0$. La figure 2.31 (c) montre que les générateurs sont remplacés par des court-circuits, la résistance vue entre B et M est égale à la mise en parallèle de R_2 et de R_1 , d'où :

$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2 \text{ k}\Omega$$

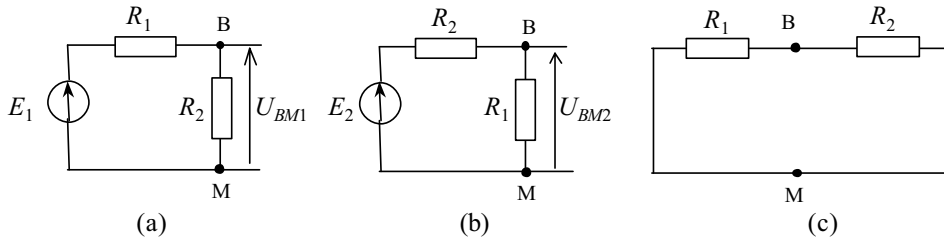


Figure 2.31 Étapes de calcul d'un générateur de Thévenin équivalent.

Pour calculer les éléments du générateur de Norton équivalent, nous utilisons les formules de passage d'un générateur de Thévenin vers un générateur de Norton. Nous obtenons :

$$R_N = R_{TH} = 2 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad I_N = \frac{E_{TH}}{R_N} = 8,33 \text{ mA}$$

2. Nous utilisons le résultat de la première question pour déterminer la différence de potentiel qui se trouve entre B et M. La résistance R_3 est la résistance de charge du générateur de Thévenin. Il suffit dans ce cas d'appliquer le diviseur de tension :

$$U_{BM} = \frac{R_3}{R_3 + R_{TH}} E_{TH} = \frac{10 \times 10^3}{(10 + 2) \times 10^3} \times 16,66 = 13,88 \text{ V}$$

Exercice 2.3 Transformation Norton-Thévenin pour le calcul d'un courant électrique

Soit le montage de la figure 2.32.

Calculer le courant électrique I qui circule dans la résistance d'utilisation R_U .

Application numérique :

$$I_1 = 2 \text{ mA}, \quad I_2 = 5 \text{ mA}, \quad R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_2 = 5 \text{ k}\Omega.$$

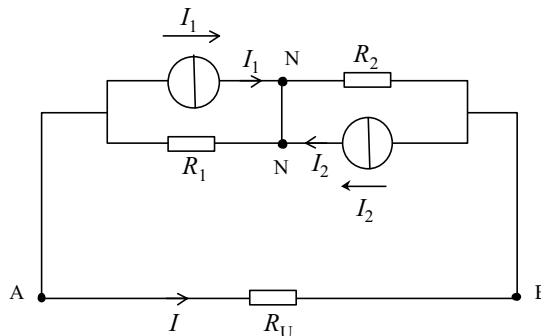


Figure 2.32 Montage simple avec deux sources de courants.

Solution

Entre A et N se trouve un générateur de Norton (I_1, R_1). De même, entre N et B, nous avons un autre générateur de Norton (I_2, R_2). Puisque AN et NB sont deux branches en série, nous aurons intérêt à utiliser les modèles de Thévenin.

Nous pouvons donc transformer le schéma de l'énoncé en un autre donné à la figure 2.33 (a).

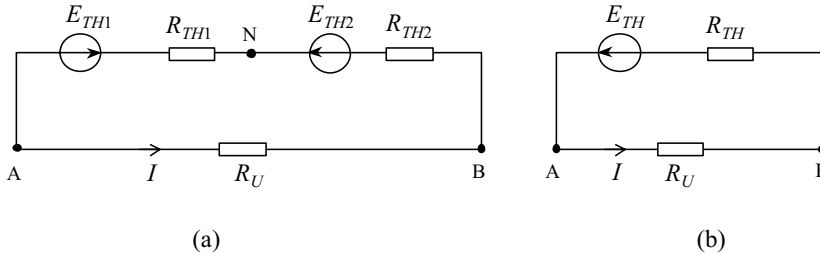


Figure 2.33 Simplification du montage de l'énoncé.

Les expressions des éléments des modèles de Thévenin sont :

$$E_{TH1} = I_1 \cdot R_1 \quad ; \quad E_{TH2} = I_2 \cdot R_2 \quad ; \quad R_{TH1} = R_1 \quad ; \quad R_{TH2} = R_2$$

Nous pouvons de nouveau chercher le modèle de Thévenin équivalent de la figure 2.33 (b) :

$$E_{TH} = E_{TH2} - E_{TH1} \quad \text{et} \quad R_{TH} = R_{TH1} + R_{TH2} = R_1 + R_2$$

D'après le schéma 2.33 (b), le sens de E_{TH} et celui du courant I sont quelconques. Si la valeur algébrique de E_{TH} est positive, le sens du courant réel correspond au sens choisi. Dans le cas contraire, nous trouverons une valeur négative du courant ce qui impose de changer le sens choisi.

Application numérique :

$$E_{TH1} = I_1 \cdot R_1 = (2 \times 10^3) \times (10 \times 10^{-3}) = 20 \text{ V}$$

$$E_{TH2} = I_2 \cdot R_2 = (5 \times 10^{-3}) \times (5 \times 10^3) = 25 \text{ V}$$

$$E_{TH} = E_{TH2} - E_{TH1} = 25 - 20 = 5 \text{ V}$$

$$R_{TH} = R_1 + R_2 = 10 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega = 15 \text{ k}\Omega$$

Nous avons bien un courant positif dans le même sens que celui indiqué à la figure 2.33 (b).

Exercice 2.4 Transformation d'un milliampèremètre en ampèremètre

Soit un milliampèremètre de résistance interne $r = 100 \Omega$ et de calibre $I = 1 \text{ mA}$. Pour pouvoir utiliser le milliampèremètre afin de mesurer des courants d'intensité I_m comprise entre 0 A et 1 A, le milliampèremètre est shunté par une résistance R_S

Le montage de la figure 2.34 représente cette transformation.

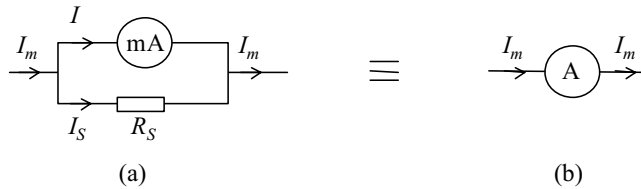


Figure 2.34 Transformation d'un milliampèremètre en ampèremètre.

1. Calculer la valeur de R_S pour obtenir l'équivalent d'un ampèremètre de calibre 1 A.
2. Quelle est alors la résistance équivalente interne de l'ampèremètre R_a ?
3. L'ampèremètre ainsi réalisé sert pour mesurer la puissance dissipée dans une résistance d'utilisation R_U . Pour cela, nous utilisons un voltmètre de résistance interne R_V

Calculer la puissance mesurée pour les deux montages présentés à la figure 2.35 (a) et 2.35 (b) appelés respectivement « courte dérivation » et « longue dérivation ».

Comparer la puissance mesurée et la puissance théorique, et conclure.

Application numérique :

$$R_V = 100 \text{ k}\Omega, R = 10 \text{ k}\Omega, E = 200 \text{ V}$$

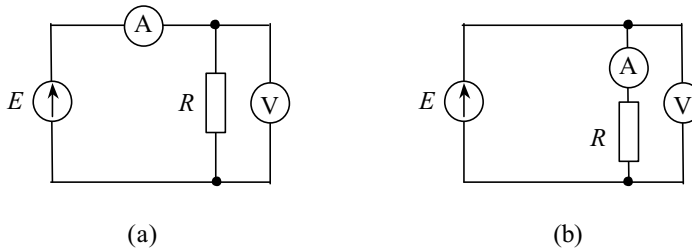


Figure 2.35 Montages courte dérivation (a) et longue dérivation (b).

Solution

1. Comme indiqué à la figure 2.35 (a), le milliampèremètre et la résistance de shunt sont en parallèles. Ils sont donc soumis à la même différence de potentiel.

$$U = r.I = R_S.I_S \quad \text{ce qui donne :} \quad R_S = r \frac{I}{I_S}$$

D'après la loi des nœuds, Le courant mesuré I_m est la somme du courant dans le milliampèremètre et du courant dans la résistance de shunt.

$$I_m = I + I_S \quad \text{soit :} \quad I_S = I_m - I = 1 \text{ A} - 1 \text{ mA} = 999 \text{ mA}$$

La résistance R_S devient :

$$R_S = r \frac{I}{I_S} = 100 \times \frac{1 \text{ mA}}{999 \text{ mA}} \approx 0,1 \Omega$$

2. Puisque le milliampèremètre et la résistance de shunt sont en parallèle, il suffit donc de remplacer le milliampèremètre par sa résistance interne. Nous avons deux résistances en parallèle. La résistance équivalente est :

$$R_{\text{équivalente}} = R_a = \frac{r.R_S}{r + R_S} = \frac{100 \times 0,1}{100 + 0,1} \approx 0,1 \Omega$$

3. Pour pouvoir comparer entre elles les deux méthodes de mesure de la puissance, nous remplaçons chaque appareil de mesure par sa résistance interne. La figure 2.36 (a) et la figure 2.36 (b) représentent respectivement le cas du montage courte dérivation et du montage longue dérivation.

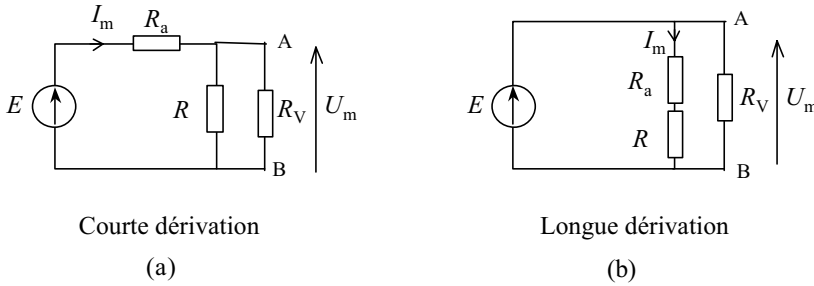


Figure 2.36 Schémas équivalents des deux méthodes.

$$R_a = \frac{r.R_S}{r + R_S} = \frac{100 \times 0,1}{100 + 0,1} \approx 0,1 \Omega \quad ; \quad R_V = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R = 10 \text{ k}\Omega \quad ; \quad E = 200 \text{ V}$$

La puissance théorique dissipée par la résistance est :

$$P_{\text{théorique}} = \frac{E^2}{R} = \frac{200^2}{10 \times 10^3} = 4 \text{ W}$$

La puissance mesurée par la méthode de courte dérivation est :

$$P_{C.D} = U_m \times I_m = U_{AB} \times I_m$$

Or nous avons :

$$R // R_V = \frac{(100 \times 10^3) \times (10 \times 10^3)}{(100 \times 10^3) + (10 \times 10^3)} = 9,09 \text{ k}\Omega$$

Or, la tension mesurée entre les points A et B est :

$$U_{AB} = \frac{R // R_V}{R_a + (R // R_V)} E = \frac{9,09 \times 10^3}{0,1 + 9,09 \times 10^3} \times E \approx E = 200 \text{ V}$$

Le courant mesuré par l'ampèremètre est :

$$I_m = \frac{E}{R_a + (R // R_V)} = \frac{E}{0,1 + 9,09 \times 10^3} \approx \frac{200}{9,09 \times 10^3} = 22 \text{ mA}$$

La puissance mesurée en courte dérivation est donc :

$$P_{C.D} = I_m \cdot U_m = (22 \text{ mA}) \times 200 \text{ V} = 4,4 \text{ W}$$

ce qui représente une erreur relative de 10 %

La puissance mesurée par la méthode de longue dérivation est :

$$P_{L.D} = U_m \cdot I_m = U_{AB} \cdot I_m$$

Or nous avons :

$$U_m = E = 200 \text{ V}$$

le courant mesuré par l'ampèremètre est :

$$I_m = \frac{E}{R_a + R} = \frac{E}{0,1 + 10 \times 10^3} \approx \frac{200}{10 \times 10^3} = 20 \text{ mA}$$

la puissance mesurée en longue dérivation est donc :

$$P_{L.D} = I_m \cdot U_m \approx 20 \text{ mA} \times 200 \text{ V} = 4 \text{ W}$$

Il n'y a presque pas d'erreur sur la mesure de la puissance avec la méthode longue dérivation. Ce résultat était prévisible puisque l'ampèremètre possède une résistance très faible qui ne perturbe pas les mesures.

Par contre, le voltmètre n'a pas une résistance très élevée par rapport à la résistance R . Sa mise en parallèle avec celle-ci modifie la valeur de la résistance équivalente, ce qui se répercute sur le résultat final.

Exercice 2.5 Application des théorèmes de Thévenin et de Norton sur un pont diviseur

Soit le montage de la figure 2.37.

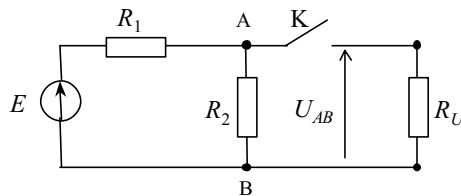


Figure 2.37 Pont diviseur et charge d'un générateur.

1. Nous supposons l'interrupteur K ouvert. Déterminer les éléments du générateur équivalent de Thévenin et du générateur de Norton vus des points A et B.

Application numérique :

$$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad E = 20 \text{ V.}$$

2. L'interrupteur K est maintenant fermé, le montage précédent est chargé par une résistance d'utilisation R_U dont la valeur varie. Tracer la courbe qui représente la tension U_{AB} en fonction de la résistance R_U .

3. Déterminer l'expression de la puissance d'utilisation P_U fournie à la résistance d'utilisation R_U . Calculer la puissance maximale.

Solution

1. Comme indiqué à la figure 2.38 (a), à vide, nous appliquons le diviseur de tension :

$$U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = E_{TH}$$

Comme indiqué à la figure 2.38 (b), si nous court-circuitons la sortie, nous trouvons :

$$I_{CC} = \frac{E}{R_1} = I_N$$

Enfin, lorsque nous passivons la source de tension : $E = 0$, le générateur est remplacé par un court-circuit comme nous l'avons présenté à la figure 2.38 (c). La résistance R_N vue entre A et B est égale à R_2 en parallèle avec R_1 .

D'où :

$$R_{TH} = R_N = (R_1 // R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

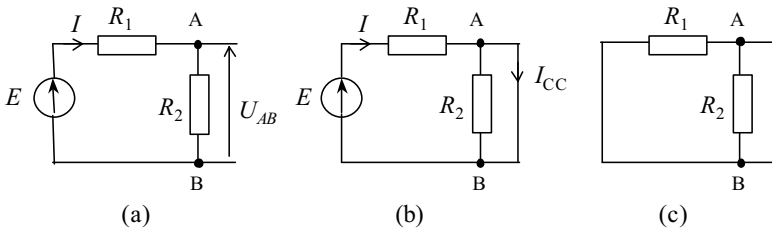


Figure 2.38 Méthode de calcul du générateur de Thévenin.

Application numérique : $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ et $E = 20 \text{ V}$ donnent :

$$E_{TH} = 20 \times \frac{2 \times 10^3}{(2 + 2) \times 10^3} = 10 \text{ V}$$

$$I_N = \frac{20}{2 \times 10^3} = 10 \text{ mA}$$

$$R_{TH} = R_N = \frac{(2 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{(2 + 2) \times 10^3} = 1 \text{ k}\Omega$$

Nous obtenons donc pour le même montage, soit le modèle de Thévenin de la figure 2.39 (a), soit le modèle de Norton de la figure 2.39 (b).

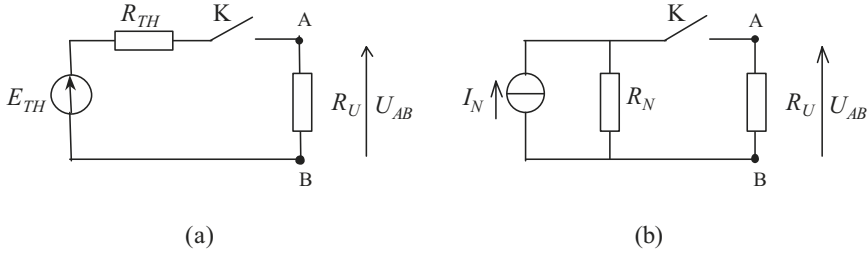


Figure 2.39 Générateurs de Thévenin (a) et de Norton (b) équivalents.

2. Lorsque le montage précédent est chargé par la résistance R_U , nous pouvons utiliser toujours le pont diviseur en tension. Nous trouvons dans ce cas :

$$U_{AB} = \frac{R_U}{R_U + R_{TH}} E_{TH} = \frac{R_U + R_{TH} - R_{TH}}{R_U + R_{TH}} E_{TH} = E_{TH} \times \left(1 - \frac{R_{TH}}{R_U + R_{TH}} \right)$$

Application numérique :

$$U_{AB} = 10 \times \left(1 - \frac{10^3}{R_U + 10^3} \right) \text{ en volt.}$$

La courbe de variation de U_{AB} en fonction de la résistance R_U est donnée à la figure 2.40.

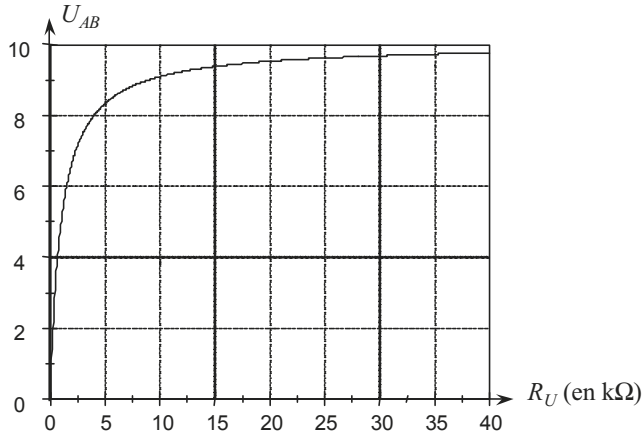


Figure 2.40 Variation de la tension U_{AB} en fonction de R_U .

3. La puissance fournie à la charge d'utilisation est P_U :

$$P_U = \frac{(U_{AB})^2}{R_U} = \left(\frac{R_U}{R_U + R_{TH}} \times E_{TH} \right)^2 \cdot R_U = (E_{TH})^2 \cdot \left(\frac{R_U}{(R_U + R_{TH})^2} \right)$$

Nous pouvons constater que cette puissance s'annule pour deux valeurs de la charge qui correspondent à R_U court-circuitée ($R_U = 0$) et lorsque la charge devient infinie. La dérivée de la puissance par rapport à la variable R_U s'annule lorsque $R_U = R_{TH}$. Dans ce cas, la puissance est maximale :

$$\frac{dP_U}{dR_U} = (E_{TH})^2 \left(\frac{(R_U + R_{TH})^2 - 2R_U(R_U + R_{TH})}{(R_U + R_{TH})^4} \right) = E_{TH}^2 \frac{R_U^2 - R_{TH}^2}{(R_U + R_{TH})^4}$$

$$\frac{dP_U}{dR_U} = E_{TH}^2 \times \frac{R_U^2 - R_{TH}^2}{(R_U + R_{TH})^4} = 0 \quad \text{impose : } R_U = R_{TH}$$

La puissance maximale est donc :

$$P_{U(\text{Max})} = \frac{E_{TH}^2}{4 \times R_{TH}} = \frac{10^2}{4 \times 10^3} = 25 \times 10^{-3} = 25 \text{ mW}$$

Exercice 2.6 Principe d'un convertisseur numérique-analogique utilisant un réseau de résistances « R-2R »

Soit le montage de la figure 2.41 qui représente un réseau appelé « R - 2R ». Ce circuit permet de convertir une tension (information) codée en binaire (numérique) en une tension analogique prise entre le point D et la masse. Cette tension est notée U_S .

Les interrupteurs K_i sont soit reliés à la masse si $K_i = 0$, soit reliés au potentiel E si $K_i = 1$.

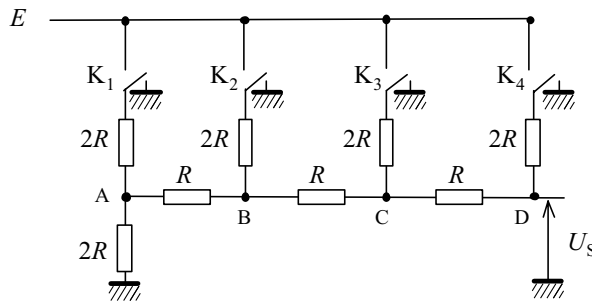


Figure 2.41 Principe d'un convertisseur numérique-analogique.

Déterminer en fonction des éléments du montage et en fonction des états des interrupteurs, l'expression de la tension de sortie U_S .

Solution

Nous pouvons utiliser le théorème de Millman aux points A, B, C et D :

$$U_A = \frac{\frac{K_1.E}{2R} + \frac{U_B}{R} + \frac{0}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{(K_1.E) + (2U_B)}{4}$$

$$U_B = \frac{\frac{K_2.E}{2R} + \frac{U_A}{R} + \frac{U_C}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{(K_2.E) + (2U_A) + (2U_C)}{5}$$

$$U_B = \frac{(K_2.E) + (2U_C)}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{(K_1.E) + (2U_B)}{4}$$

soit :

$$U_B = \frac{K_1.E}{8} + \frac{K_2.E}{4} + \frac{U_C}{2}$$

$$U_C = \frac{\frac{K_3.E}{2R} + \frac{U_B}{R} + \frac{U_D}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{(K_3.E) + (2.U_B) + (2.U_D)}{5}$$

$$U_C = \frac{K_1.E}{16} + \frac{K_2.E}{8} + \frac{K_3.E}{4} + \frac{U_D}{2}$$

Enfin nous pouvons tirer l'expression de U_D :

$$U_D = \frac{\frac{K_4.E}{2R} + \frac{U_C}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{K_1.E}{16} + \frac{K_2.E}{8} + \frac{K_3.E}{4} + \frac{K_4.E}{2}$$

Ce résultat s'écrit sous une forme plus intéressante :

$$U_D = \frac{E}{16} \times [(K_1 \times 2^0) + (K_2 \times 2^1) + (K_3 \times 2^2) + (K_4 \times 2^3)]$$

Les positions des interrupteurs correspondent à la valeur de la tension analogique obtenue. Cette tension est proportionnelle au nombre binaire constitué de 4 bits. Il s'agit bien d'un convertisseur numérique-analogique.

Exercice 2.7 Application de la loi des mailles sur un circuit complexe

Soit le montage de la figure 2.42.

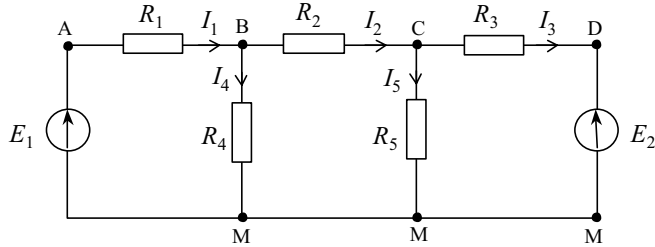


Figure 2.42 Circuit avec plusieurs nœuds et plusieurs mailles.

Déterminer en fonction des éléments du montage les intensités I_1 , I_2 , I_3 , I_4 et I_5 dans chaque branche du réseau.

Application numérique :

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega, \quad E_1 = 10 \text{ V} \quad \text{et} \quad E_2 = 20 \text{ V}$$

Solution

Nous pouvons utiliser la loi des mailles appliquée aux trois mailles suivantes : (ABMA), (BCMB) et (CDMC). Nous constatons de suite que les courants I_4 et I_5 s'écrivent :

$$I_4 = I_1 - I_2 \quad \text{et} \quad I_5 = I_2 - I_3$$

Les équations des mailles deviennent :

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 + R_4 (I_1 - I_2) - E_1 = 0 \\ -R_4 (I_1 - I_2) + R_2 \cdot I_2 + R_5 (I_2 - I_3) = 0 \\ -R_5 (I_2 - I_3) + R_3 \cdot I_3 + E_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} (R_1 + R_4) I_1 - R_4 \cdot I_2 = E_1 \\ -R_4 \cdot I_1 + (R_2 + R_4 + R_5) I_2 - R_5 \cdot I_3 = 0 \\ 0 \times I_1 - R_5 \cdot I_2 + (R_3 + R_5) I_3 = -E_2 \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs numériques, nous obtenons le système d'équation :

$$\begin{cases} (3 \times 10^3) \times I_1 - (2 \times 10^3) \times I_2 = 10 \\ -(2 \times 10^3) \times I_1 + (5 \times 10^3) \times I_2 - (2 \times 10^3) \times I_3 = 0 \\ 0 \times I_1 - (2 \times 10^3) \times I_2 + (3 \times 10^3) \times I_3 = -20 \end{cases}$$

Il suffit de résoudre le système en utilisant le calcul matriciel :

$$\begin{bmatrix} 3 \times 10^3 & -2 \times 10^3 & 0 \\ -2 \times 10^3 & 5 \times 10^3 & -2 \times 10^3 \\ 0 & -2 \times 10^3 & 3 \times 10^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Pour cela, nous pouvons utiliser par exemple la méthode de Cramer :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^3 & -2 \times 10^3 \\ -20 & -2 \times 10^3 & 3 \times 10^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 \times 10^3 & 2 \times 10^3 & 0 \\ -2 \times 10^3 & 5 \times 10^3 & -2 \times 10^3 \\ 0 & -2 \times 10^3 & 3 \times 10^3 \end{vmatrix}}$$

Nous déterminons de la même façon les autres courants :

$$I_1 = \frac{30 \times 10^6}{45 \times 10^9} = 0,66 \text{ mA}, \quad I_2 = -1,33 \text{ mA} \quad \text{et} \quad I_3 = -7,55 \text{ mA}$$

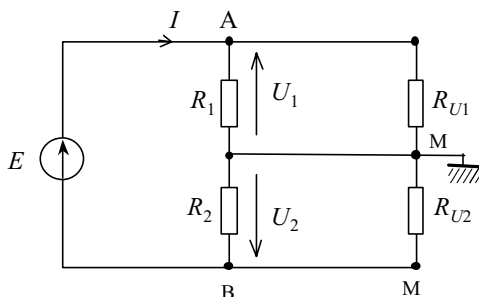
Nous obtenons donc :

$$I_1 = 0,66 \text{ mA}, \quad I_2 = -1,33 \text{ mA}, \quad I_3 = -7,55 \text{ mA}, \quad I_4 = 2 \text{ mA}, \quad I_5 = 6,22 \text{ mA}.$$

Ces résultats montrent que les sens choisis pour les courants ne sont pas tous corrects. En effet, le générateur E_2 impose son courant de droite à gauche et par conséquence le courant I_2 est lui aussi de droite à gauche.

Exercice 2.8 Précisions sur les références de tensions obtenues par circuit résistif

Soit le montage de la figure 2.43.



$$E = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega \pm 10 \%$$

$$\text{a) } R_{U1} = \infty \text{ et } R_{U2} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\text{b) } R_{U1} = R_{U2} = 10 \text{ k}\Omega$$

Figure 2.43 Montage « références de tensions ».

1. Calculer les tensions limites entre lesquelles varient U_1 et U_2 lorsque les résistances de charge R_{U1} et R_{U2} sont infinies.
2. Soit le cas a) avec R_1 et R_2 sans tolérances. Calculer les tensions U_1 et U_2 .
3. Soit le cas b) où R_1 et R_2 sont des résistances avec une tolérances de 10 %. Calculer les tensions limites de U_1 et de U_2 . Conclure.

Solution

1. Les résistances de charge R_{U1} et R_{U2} sont infinies. En utilisant le diviseur de tension, nous constatons que la tension U_2 est la tension prise aux bornes de R_2 , négative puisque dans le même sens que celui du courant. Nous obtenons les expressions de U_1 et de U_2 :

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \quad \text{et} \quad U_2 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Or, les valeurs de R_1 et de R_2 varient entre une valeur maximale R_{Max} et une valeur minimale R_{min} . Les valeurs limites sont obtenues lorsque R_1 est maximale avec R_2 minimale, ou l'inverse lorsque R_1 est minimale avec R_2 maximale.

$$R_{\text{Max}} = 1 \text{ k}\Omega + 10 \% = 1,1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_{\text{min}} = 1 \text{ k}\Omega - 10 \% = 0,9 \text{ k}\Omega$$

$$U_{1\text{Max}} = \frac{R_{\text{Max}}}{R_{\text{Max}} + R_{\text{min}}} \times E = 11 \text{ V}, \quad U_{2\text{min}} = -\frac{0,9 \text{ k}\Omega}{1,1 \text{ k}\Omega + 0,9 \text{ k}\Omega} \times 20 = -9 \text{ V}$$

$$U_{1\text{min}} = \frac{0,9 \text{ k}\Omega}{1,1 \text{ k}\Omega + 0,9 \text{ k}\Omega} \times 20 = 9 \text{ V}, \quad U_{2\text{min}} = -\frac{1,1 \text{ k}\Omega}{1,1 \text{ k}\Omega + 0,9 \text{ k}\Omega} \times 20 = -11 \text{ V}$$

2. La résistances de charge R_{U1} est infinie, la résistance R_{U2} se trouve en parallèle avec R_2 . Il suffit donc d'appliquer le diviseur de tension. Nous obtenons les expressions de U_1 et de U_2 :

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 // R_{U2})} E \quad \text{et} \quad U_2 = -\frac{(R_2 // R_{U2})}{R_1 + (R_2 // R_{U2})} E$$

Or :

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad (R_2 // R_{U2}) = \frac{1 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ k}\Omega} = 0,909 \text{ k}\Omega$$

$$U_1 = \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 0,909 \text{ k}\Omega} \times E = 10,47 \text{ V}$$

et

$$U_2 = -\frac{0,909 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 0,909 \text{ k}\Omega} \times 20 = -9,53 \text{ V}$$

3. La résistance de charge R_{U1} se trouve en parallèle avec R_1 et la résistance de charge R_{U2} se trouve en parallèle avec R_2 . Nous appliquons toujours le diviseur de tension pour obtenir les expressions de U_1 et de U_2 :

$$U_1 = \frac{(R_1 // R_{U1})}{(R_1 // R_{U1}) + (R_2 // R_{U2})} E \quad \text{et} \quad U_2 = -\frac{(R_2 // R_{U2})}{(R_1 // R_{U1}) + (R_2 // R_{U2})} E$$

Or, R_1 et de R_2 varient entre la valeur maximale R_{Max} et la valeur minimale R_{min} .

$$R_{\text{Max}} = 1 \text{ k}\Omega + 10 = 1,1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_{\text{min}} = 1 \text{ k}\Omega - 10 = 0,9 \text{ k}\Omega$$

Ce qui impose que les valeurs limites de la résistance équivalente, constituée de la mise en parallèle soit de R_1 et de R_{U1} soit de R_2 et de R_{U2} , sont obtenues lorsque $R_1 // R_{U1}$ est maximale avec $R_2 // R_{U2}$ minimale, ou l'inverse lorsque $R_1 // R_{U1}$ est minimale avec $R_2 // R_{U2}$ est maximale.

$$(R_1 // R_{U1})_{\text{Max}} = \frac{1,1 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ k}\Omega}{1,1 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = 0,99 \text{ k}\Omega$$

$$(R_2 // R_{U2})_{\text{min}} = \frac{0,9 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ k}\Omega}{0,9 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = 0,825 \text{ k}\Omega$$

$$(R_2 // R_{U2})_{\text{Max}} = \frac{1,1 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ k}\Omega}{1,1 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = 0,99 \text{ k}\Omega$$

$$(R_1 // R_{U1})_{\text{min}} = \frac{0,9 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ k}\Omega}{0,9 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = 0,825 \text{ k}\Omega$$

Les valeurs limites des tensions deviennent :

$$U_{1\text{Max}} = \frac{0,99}{0,99 + 0,825} \times 20 = 10,9 \text{ V}$$

$$U_{2\text{min}} = -\frac{0,825}{0,825 + 0,99} \times 20 = -9,1 \text{ V}$$

$$U_{2\text{Max}} = -\frac{0,99}{0,99 + 0,825} \times 20 = -10,9 \text{ V}$$

$$U_{1\text{min}} = \frac{0,825}{0,825 + 0,99} \times 20 = 9,1 \text{ V}$$

Nous constatons que ces résultats sont proches des résultats obtenus à la première question. Nous aurons donc intérêt à prendre des résistances R_1 et R_2 de bonne qualité avec une tolérance faible. Il faut garder à l'esprit que le pont diviseur ne peut servir de référence de tension que d'une façon grossière ; les incertitudes sur les résistances du pont et la variation de la charge (question 2) font que la tension recherchée est susceptible de varier dans des larges proportions.

Exercice 2.9 Précisions sur les tensions obtenues par un diviseur de tension ajustable

Soit le montage de la figure 2.44.

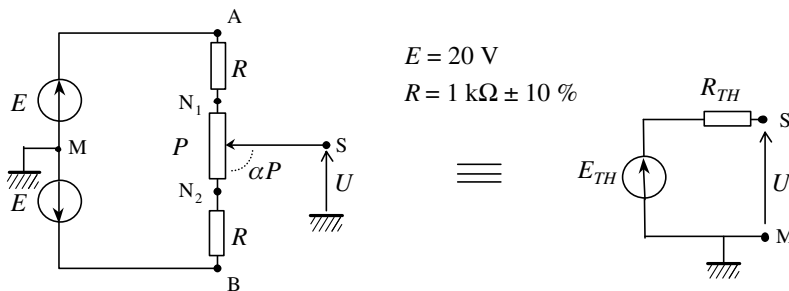


Figure 2.44 Montage diviseur de tension ajustable.

1. Déterminer les expressions de E_{TH} et de R_{TH} en fonction des éléments du circuit. En déduire la valeur P du potentiomètre qui permet d'avoir une tension de sortie U à vide qui varie entre +5 V et -5 V. Tracer ces courbes en fonction de α .
2. Calculer les tensions limites entre lesquelles varient U lorsque les résistances R présentent des tolérances de 10 %. Que deviennent ces limites lorsque le potentiomètre présente lui aussi une incertitude de 10 %.

Solution

1. Les deux sources de tensions E sont symétriques de part et d'autre du point M, nous avons :

$$U_{AM} = E = 20 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_{BM} = -E = -20 \text{ V}$$

Nous pouvons utiliser la loi des nœuds, mais il est plus simple d'appliquer le théorème de superposition pour déterminer la tension de Thévenin équivalente. Or la fraction de la résistance entre le point S et le point N_2 est notée αP , α variant entre 0 et 1. La résistance qui se trouve entre le point S et le point N_1 est donc notée $(1 - \alpha)P$.

$$U = E_{TH} = \frac{R + \alpha P}{R + \alpha P + (1 - \alpha)P + R}E - \frac{R + (1 - \alpha)P}{R + \alpha P + (1 - \alpha)P + R}E$$

$$U = E_{TH} = \frac{R + \alpha P}{2R + P}E - \frac{R + (1 - \alpha)P}{2R + P}E$$

$$U = \frac{(2\alpha - 1)P}{2R + P}E = \frac{2P \cdot E}{2R + P}\alpha - \frac{P \cdot E}{2R + P}$$

La variable étant α , l'expression précédente correspond à l'équation d'une droite (figure 2.45 (a)). Cette tension représente la tension à vide mesurée entre le point S et la masse M.

➤ $\alpha = 0$, la tension à vide devient : $U = E_{TH} = \frac{-P}{20 \text{ k}\Omega + P} \times 20$;

➤ $\alpha = 1$, la tension à vide devient : $U = E_{TH} = \frac{P}{20 \text{ k}\Omega + P} \times 20$.

Pour obtenir une sortie qui varie entre +5 V et -5 V, Il suffit de résoudre l'une des expressions précédentes :

$$\alpha = 1, \quad E_{TH} = \frac{P}{20 \text{ k}\Omega + P} \times 20 = 5 \text{ V}, \quad \text{ce qui donne : } P = 6,666 \text{ k}\Omega$$

La résistance R_{TH} est obtenue en passivant les deux sources de tension (nous remplaçons les deux sources par des courts-circuits). Nous aurons dans ce cas deux résistances en parallèle :

$$R_{TH} = \frac{(R + \alpha P) \times (R + (1 - \alpha)P)}{(R + \alpha P) + (R + (1 - \alpha)P)} = \frac{R^2 + PR + \alpha P^2 - \alpha^2 P^2}{2R + P}$$

$$R_{TH} = \frac{R^2 + PR + \alpha P^2 (1 - \alpha)}{2R + P}$$

La dérivée de l'expression de R_{TH} par rapport à α donne :

$$\frac{dR_{TH}}{d\alpha} = \frac{(2R + P) \times (P^2 - 2\alpha P^2) - 0 \times (R^2 + PR + \alpha P^2 (1 - \alpha))}{(2R + P)^2}$$

$$\frac{dR_{TH}}{d\alpha} = \frac{(2R + P) \times (1 - 2\alpha) \times P^2}{(2R + P)^2}$$

Cette dérivée s'annule pour $\alpha = 0,5$ et passe par un maximum en ce point :

► pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$, $R_{TH} = \frac{R^2 + PR}{2R + P} = 6,25 \text{ k}\Omega$

► pour $\alpha = 0,5$, $R_{TH} = \frac{R^2 + PR + 0,25 \times P^2}{2R + P} = 6,667 \text{ k}\Omega$

Nous constatons que la valeur de la résistance de Thévenin varie dans des faibles proportions pour une variation totale du potentiomètre (figure 2.42 (b)).

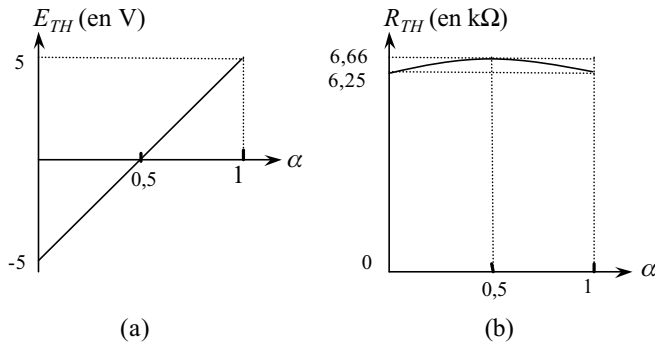


Figure 2.45 Variation de E_{TH} (a) et de R_{TH} (b) en fonction de α .

2. Les deux résistances R présentent des incertitudes de 10 %. La tension de sortie U se trouve affectée et les limites sont obtenues pour les cas extrêmes.

La résistance qui se trouve entre le point S et le point B est notée R_{SB} et la résistance qui se trouve entre le point S et le point A est notée R_{SA} .

$$U = E_{TH} = \frac{R_{SB}}{R_{SB} + R_{SA}} E - \frac{R_{SA}}{R_{SB} + R_{SA}} E$$

Les conditions limites sont obtenues lorsque nous prenons dans un cas R_{SB} maximale avec R_{SA} minimale et inversement. Or,

$$R_{SB(\text{Max})} = P + R_{\text{Max}} \quad \text{et} \quad R_{SA(\text{min})} = R_{\text{min}}$$

avec :

$$R_{\text{Max}} = 11 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_{\text{min}} = 9 \text{ k}\Omega.$$

Nous obtenons :

$$U_{\text{MAX}} = E_{TH} = \frac{R_{SB(\text{Max})}}{R_{SB(\text{Max})} + R_{SA(\text{min})}} E - \frac{R_{SA(\text{min})}}{R_{SB(\text{Max})} + R_{SA(\text{min})}} E$$

$$U_{\text{Max}} = E_{TH} = \frac{17,666 \text{ k}\Omega}{17,666 \text{ k}\Omega + 9 \text{ k}\Omega} \times 20 - \frac{9 \text{ k}\Omega}{17,666 \text{ k}\Omega + 9 \text{ k}\Omega} \times 20 = 6,48 \text{ V}$$

La tension de sortie à vide varie maintenant entre +6,48 V et -6,48 V. Nous remarquons que la variation par rapport aux valeurs trouvées à la première question est très grande ce qui représente une variation relative de $1,48/5 = 29 \%$.

Lorsque le potentiomètre présente lui aussi une tolérance de 10 %, le calcul reste le même en tenant compte de l'incertitude sur le potentiomètre :

$$R_{SB(\text{Max})} = P_{\text{Max}} + R_{\text{Max}} \quad \text{et} \quad R_{SA(\text{min})} = R_{\text{min}}$$

avec :

$$R_{\text{Max}} = 11 \text{ k}\Omega, P_{\text{Max}} = 7,32 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_{\text{min}} = 9 \text{ k}\Omega.$$

Nous obtenons dans ce cas :

$$U_{\text{MAX}} = E_{TH} = \frac{18,32 \text{ k}\Omega}{18,32 \text{ k}\Omega + 9 \text{ k}\Omega} \times 20 - \frac{9 \text{ k}\Omega}{18,32 \text{ k}\Omega + 9 \text{ k}\Omega} \times 20 = 6,82 \text{ V}$$

Exercice 2.10 Etude d'un pont de Wheatstone

Une source de tension continue délivre une tension d'amplitude E dans le circuit appelé « pont de Wheatstone » représenté à la figure 2.46.

1. Déterminer l'expression de la résistance équivalente R_{eq} vue entre les bornes A et B. En déduire l'expression du courant I .

Cas particulier : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

2. On prend le cas particulier ($R_1 = R_3 = R/2$ et $R_2 = R_4 = R$), déterminer l'expression du courant I_R qui circule dans la résistance R .

3. On suppose maintenant que la résistance R représente la résistance interne d'un ampèremètre. Donner la condition sur les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 pour avoir un courant I_R nul.

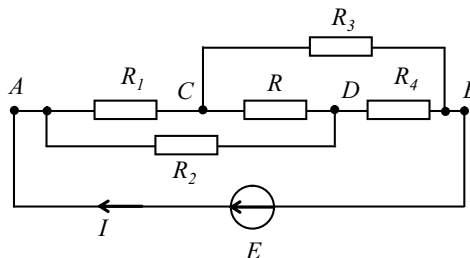


Figure 2.46 Circuit dit « en pont de Wheatstone ».

Solution

1. Expressions de la résistance équivalente R_{eq}

On commence par présenter le circuit d'une autre façon (figure 2.47 a). On peut ensuite transformer les trois résistances R_1 , R_2 , et R qui sont branchées en triangle, en une représentation équivalente en étoile formée par R_A , R_C , et R_D (figure 2.47 b).

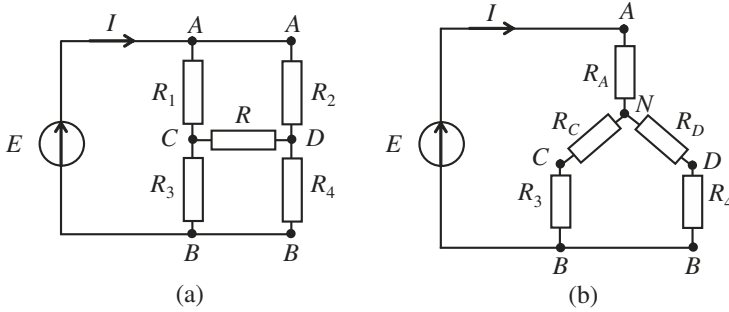


Figure 2.47 Pont de Wheatstone (a) et transformation triangle-étoile (b).

Dans le cas d'une représentation étoile, les expressions des différentes résistances sont :

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_D = \frac{R R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

Entre le point N et le point B , on a deux résistances en parallèles. La résistance équivalente R_{eq} du circuit devient :

$$R_{\text{eq}} = R_A + [(R_C + R_3) // (R_D + R_4)]$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{3} + \left[\left(\frac{R}{3} + R \right) // \left(\frac{R}{3} + R \right) \right] = \frac{R}{3} + \left[\left(\frac{4R}{3} \right) // \left(\frac{4R}{3} + R \right) \right]$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{3} + \frac{\frac{4R}{3} \times \frac{4R}{3}}{\frac{4R}{3} + \frac{4R}{3}} = \frac{R}{3} + \frac{16R^2}{9} \times \frac{3}{8R} = \frac{R}{3} + \frac{2R}{3} = R$$

Le courant qui circule dans la résistance équivalente est : $I = \frac{E}{R_{\text{eq}}} = \frac{E}{R}$.

2. Expressions du courant I_R

Pour déterminer l'expression du courant I_R , il suffit de trouver les expressions des potentiels des point C et D. On prend le potentiel du point B comme potentiel de référence : $V_B = 0$.

$$V_C = \frac{V_A G_1 + V_B G_3 + V_D G}{G_1 + G + G_3} = \frac{V_A G_1 + V_D G}{G_1 + G + G_3} = \frac{E G_1 + V_D G}{G_1 + G + G_3}$$

$$V_D = \frac{V_A G_2 + V_B G_4 + V_C G}{G_2 + G_4 + G} = \frac{V_A G_2 + V_C G}{G_2 + G_4 + G} = \frac{E G_2 + V_C G}{G_2 + G_4 + G}$$

En remplaçant l'expression de V_D dans l'expression de V_C , on obtient :

$$V_C = \frac{E G_1 + V_D G}{G_1 + G + G_3} = \frac{E G_1 + \frac{E G_2 + V_C G}{G_2 + G_4 + G} \times G}{G_1 + G + G_3}$$

$$= \frac{E G_1 (G_2 + G_4 + G) + (E G_2 + V_C G) \times G}{(G_1 + G + G_3) \times (G_2 + G_4 + G)}$$

$$\text{Cas particulier : } V_C = \frac{2EG(G + G + G) + (EG + V_C G) \times G}{(2G + G + 2G) \times (G + G + G)} = \frac{7EG^2 + V_C G^2}{15G^2}$$

On en déduit donc : $14G^2 V_C = 7EG^2$ soit : $V_C = E/2$

$$\text{Le potentiel du point D devient : } V_D = \frac{E G_2 + V_C G}{G_2 + G_4 + G} = \frac{E G + (E/2) G}{G + G + G} = \frac{E}{2}$$

Puisque le potentiel du point D est égal au potentiel du point C, le courant qui circule dans la résistance R est nul.

3. Condition pour avoir un courant I_R nul

Pour avoir un courant nul dans la résistance R , il suffit d'avoir une différence de potentiel nulle aux bornes de cette résistance. Dans ce cas, en supposant I_R nul, on peut appliquer le diviseur de tension pour trouver les potentiels des point C et D. On prend le potentiel du point B comme potentiel de référence : $V_B = 0$.

$$V_C = E \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{et} \quad V_D = E \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

$$\text{En égalisant les deux potentiels, on trouve : } E \frac{R_3}{R_1 + R_3} = E \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

$$\text{Soit : } R_3 (R_2 + R_4) = R_4 (R_1 + R_3) \text{ ce qui donne : } R_2 R_3 = R_1 R_4$$

Cette condition était vérifiée pour la première et pour la deuxième question.

Exercice 2.11 *Choix entre les méthodes « courte dérivation » et « longue dérivation »*

Pour mesurer la résistance R d'un dipôle, on utilise un voltmètre de résistance interne R_V et un ampèremètre de résistance interne R_A .

1. On utilise la méthode dite de *courte dérivation* donnée à la figure 2.48(a). Déterminer l'expression de la résistance mesurée $R_{m(CD)}$ en fonction de R , R_V et R_A .
2. On utilise la méthode dite de *longue dérivation* donnée à la figure 2.48(b). Déterminer l'expression de la résistance mesurée $R_{m(LD)}$ en fonction de R , R_V et R_A .
3. En déduire l'erreur relative ε pour chaque montage. Préciser selon la valeur de la résistance R le meilleur choix à adopter.

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} \quad , \quad \varepsilon = \frac{|R - R_m|}{R}$$

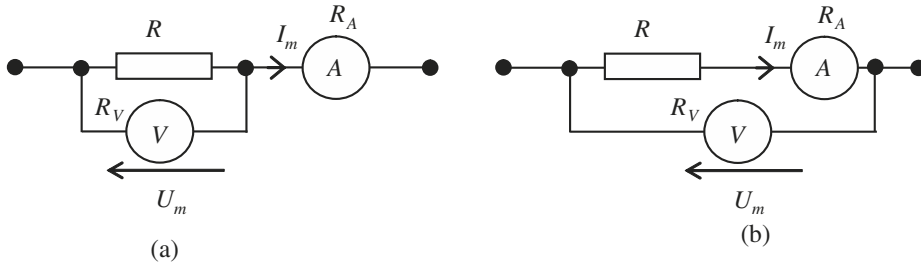


Figure 2.48 Montage courte dérivation (a) et montage longue dérivation (b).

Solution

1. Cas du montage courte dérivation

Dans ce cas, le courant mesuré par l'ampèremètre est la somme du courant traversant la résistance R et le courant circulant dans le voltmètre V .

$$I_m = I_R + I_V = \frac{U_m}{R} + \frac{U_m}{R_V} = U_m \times \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right)$$

On en déduit l'expression de la résistance mesurée :

$$R_{m(CD)} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{R \times R_V}{R + R_V} = R // R_V$$

On voit que la résistance mesurée est sous-estimée.

2. Cas du montage longue dérivation

Dans ce cas, la tension mesurée par le voltmètre est la somme de la tension qui se trouve aux bornes de la résistance R et la tension qui se trouve aux bornes de l'ampèremètre.

$$U_m = U_R + U_A = RI_m + R_AI_m = I_m \times (R + R_A)$$

On en déduit l'expression de la résistance mesurée :

$$R_{m(LD)} = \frac{U_m}{I_m} = R + R_A$$

On voit que la résistance mesurée est surestimée.

3. Calcul de l'erreur relative

– Dans le cas du montage en courte dérivation on obtient :

$$\varepsilon_{CD} = \frac{|R - R_m|}{R} = \frac{\left| R - \frac{RR_V}{R + R_V} \right|}{R} = \left| 1 - \frac{R_V}{R + R_V} \right| = \frac{R}{R + R_V}$$

– Dans le cas du montage en longue dérivation on obtient :

$$\varepsilon_{LD} = \frac{|R - R_m|}{R} = \frac{|R - (R + R_A)|}{R} = \frac{R_A}{R}$$

En pratique, la résistance du voltmètre est très élevée par rapport à la résistance de l'ampèremètre :

$$R_A \ll R_V$$

On choisit le montage courte dérivation lorsque l'erreur relative ε_{CD} est inférieure à l'erreur relative longue dérivation ε_{LD} .

$$\left(\varepsilon_{CD} = \frac{R}{R + R_V} \right) < \left(\varepsilon_{LD} = \frac{R_A}{R} \right)$$

Soit : $\frac{R}{R + R_V} < \frac{R_A}{R} \Rightarrow R^2 - RR_A - R_A R_V < 0$

Pour l'égalité, on a une équation de second degré :

$$R^2 - RR_A - R_A R_V = 0$$

Les deux solutions sont :

$$R = \frac{R_A + \sqrt{R_A^2 + 4R_A R_V}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad R = \frac{R_A - \sqrt{R_A^2 + 4R_A R_V}}{2} < 0$$

Seule la première solution est valable puisqu'il s'agit d'une résistance positive. Cette solution peut se simplifier puisque $R_A \ll R_V$, on obtient :

$$R = \frac{R_A + \sqrt{R_A^2 + 4R_A R_V}}{2} \approx \sqrt{R_A R_V}$$

Conclusion : si la résistance à mesurer est inférieure à la moyenne géométrique des résistances R_A et R_V , le montage courte dérivation représente l'erreur la plus faible. Dans le cas contraire, c'est le montage longue dérivation qui est le plus précis.

Chapitre 3

Analyse harmonique

Le régime sinusoïdal, appelé souvent régime harmonique, joue un rôle considérable en électronique linéaire, et plus généralement dans la théorie des systèmes linéaires, pour diverses raisons :

- la forme du signal sinusoïdal est la seule qui se conserve à la traversée d'un système linéaire. En effet, l'intégrale ou la dérivée d'une sinusoïde reste toujours une sinusoïde avec une amplitude et une phase qui peuvent varier ;
- la théorie de Fourier montre que tout signal peut être décomposé en une somme infinie de signaux sinusoïdaux. Nous pouvons donc prévoir la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque connaissant sa réponse harmonique ;
- enfin, le signal sinusoïdal est très répandu parce qu'il est facile à produire.

3.1 REPRÉSENTATION D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

3.1.1 Représentation vectorielle

Nous avons vu au chapitre 2 la représentation cartésienne d'une fonction sinusoïdale. Cette représentation, qui peut être qualifiée comme étant la plus courante, souffre du nombre limité d'opérations qu'elle permet : addition de deux ou trois signaux au maximum et à la rigueur intégration ou dérivation.

a) Représentation de Fresnel

À l'inverse, dans la représentation vectorielle ou cinématique, appelée aussi *représentation de Fresnel*, le signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$ est considéré comme la projection, sur l'axe Ox d'un repère orthonormé d'un vecteur $\vec{S}$, de module S_m , tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω , et confondu avec l'axe Ox aux instants t :

$$t = -\frac{\phi}{\omega} + 2K\frac{\pi}{\omega} = -\frac{\phi}{\omega} + 2KT$$

La figure 3.1 en donne une illustration lorsque $\cos(\phi)$ est positif.

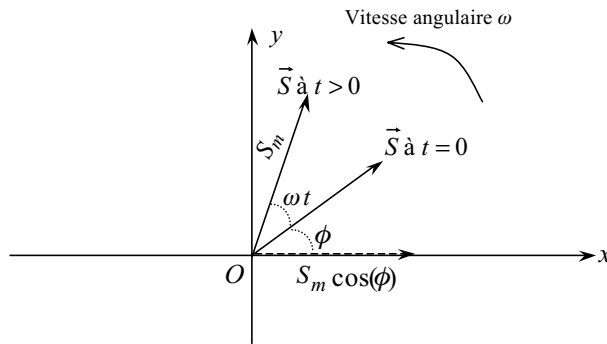


Figure 3.1 Représentation de Fresnel pour $\cos(\phi)$ positif.

La situation du vecteur à l'origine des temps définit la phase à l'origine. La phase instantanée est l'angle que fait le vecteur à un instant quelconque avec l'axe Ox , ce qui donne dans le cas de la figure 3.1 une phase instantanée égale à : $\omega t + \phi$.

b) Opérations linéaires sur les vecteurs de Fresnel

La représentation de Fresnel donne donc une image des différentes grandeurs à un instant donné, l'image devant tourner à la vitesse ω autour de l'origine. Souvent, pour simplifier la représentation, les vecteurs sont dessinés dans leurs positions à l'instant $t = 0$ et l'ensemble du dessin est supposé tourner à la vitesse ω .

Nous venons de voir qu'à la condition que les fonctions sinusoïdales aient la même pulsation, les vecteurs représentatifs gardent la même position relative les uns par rapport aux autres au cours de la rotation.

► Somme de deux vecteurs de même pulsation

Représentons par exemple deux vecteurs tensions $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ à l'instant $t = 0$:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Cherchons maintenant la somme de ces deux vecteurs.

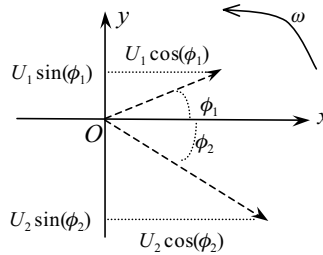


Figure 3.2 Représentation de Fresnel de deux vecteurs tensions.

Pour effectuer la somme de deux vecteurs, il faut les mettre bout à bout. Le vecteur ayant comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second est le vecteur somme. La figure 3.3 montre la construction de ce vecteur somme. Cette figure n'est représentative de la tension $u = U \cos(\omega t + \phi)$ qu'à l'instant $t = 0$. Pour obtenir les différentes valeurs temporelles, il suffit de faire tourner le plan à la vitesse angulaire ω autour de l'origine.

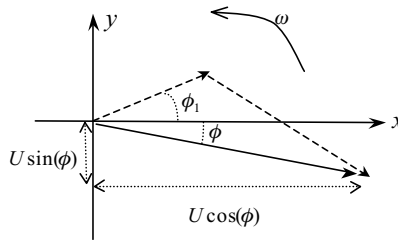


Figure 3.3 Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Pour calculer les composantes du vecteur somme, il suffit comme le montre la figure 3.3 d'ajouter les composantes de chaque vecteur. En projetant, sur l'axe des ordonnées, l'extrémité des deux vecteurs, nous obtenons $U_1 \sin(\phi_1)$ et $U_2 \sin(\phi_2)$. En projetant sur l'axe des abscisses ces mêmes vecteurs, on trouve $U_1 \cos(\phi_1)$ et $U_2 \cos(\phi_2)$. Les composantes du vecteur somme sont donc :

$$U \cos(\phi) = U_1 \cos(\phi_1) + U_2 \cos(\phi_2)$$

$$U \sin(\phi) = U_1 \sin(\phi_1) + U_2 \sin(\phi_2)$$

Pour obtenir le module, appelé aussi amplitude du vecteur somme, nous appliquons le théorème de Pythagore. Le module noté U est :

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

La tangente de la phase à l'origine est obtenue en faisant le rapport des composantes :

$$\tan(\phi) = \frac{U_1 \sin(\phi_1) + U_2 \sin(\phi_2)}{U_1 \cos(\phi_1) + U_2 \cos(\phi_2)}$$

Ces résultats peuvent être obtenus en utilisant la méthode du calcul trigonométrique.

► Changement de l'origine des temps

Soit le signal : $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ représenté à l'instant $t = 0$ à la figure 3.4 (a). Si nous posons maintenant : $t' = t - t_0$, la tension $u(t)$ s'écrit : $u(t') = U \cos(\omega t' + \phi + \omega t_0)$ ce qui donne à l'instant $t' = 0$, pris maintenant comme origine, le résultat de la figure 3.4 (b).

Nous avançons ainsi le signal, si nous prenons pour origine des temps un instant ultérieur.

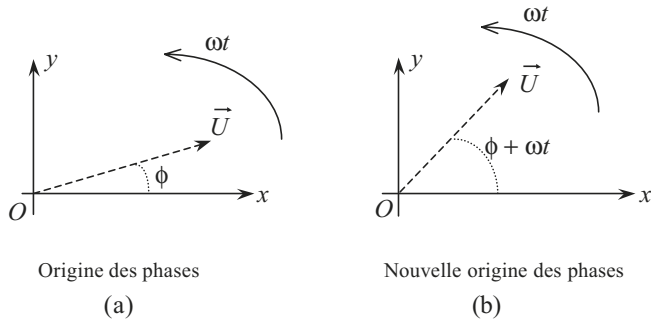


Figure 3.4 Effet du changement de l'origine du temps sur la phase.

► Dérivation et intégration par rapport au temps

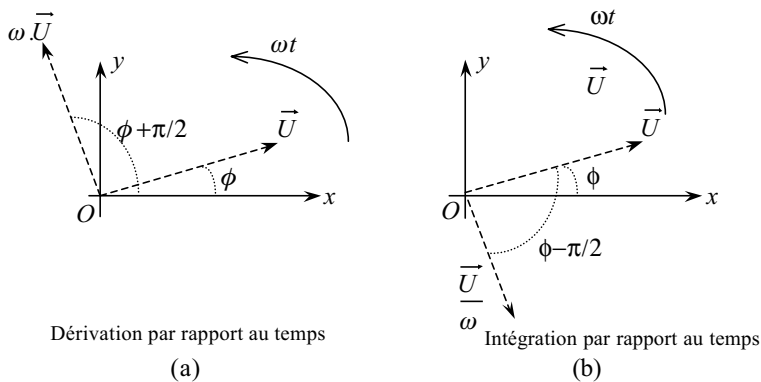


Figure 3.5 Effet de la dérivation et de l'intégration.

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega \sin(\omega t + \phi) = \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

La dérivation se traduit en représentation de Fresnel par une rotation de $+\pi/2$ et une multiplication du module du vecteur par la quantité ω .

Inversement, l'intégration se traduit par une rotation de $-\pi/2$ et une division du module par la quantité ω .

Le schéma de la figure 3.5 illustre le principe de la dérivation et de l'intégration. Les amplitudes des vecteurs dépendent de la valeur de la pulsation ω .



Remarque : Ces propriétés ne sont valables qu'en régime *sinusoïdal permanent*, seul concerné par la représentation de Fresnel.

3.1.2 Représentation complexe

La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.

a) *Rappels mathématiques*

Nous appelons nombre complexe, tout nombre de la forme $Z = a + jb$ où a et b sont des nombres réels.

Soit deux nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que $Z_1 = a_1 + jb_1$ et $Z_2 = a_2 + jb_2$, nous avons :

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Le signe moins qui apparaît dans cette formule est dû au terme « j^2 » qui vaut -1 . Le nombre complexe conjugué Z^* est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire.

$$Z = a + jb \quad \text{et} \quad Z^* = a - jb$$

Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :

- la forme classique : $Z = a + jb$,
- la forme trigonométrique : $Z = |Z| (\cos \phi + j \sin \phi)$,
- la forme exponentielle : $Z = |Z| e^{j\phi}$,

où $|Z|$ est le module : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z \cdot Z^*}$,

et ϕ est l'argument : $\phi = \text{Arctan} \left(\frac{b}{a} \right)$.

► Représentation complexe

Nous rappelons que le plan orthonormé complexe possède l'axe Ox comme axe des réels et l'axe Oy comme axe des imaginaires. L'opérateur j (les mathématiciens l'appellent : « i ») permet d'effectuer une rotation de $\pi/2$ (ou 90°) à un vecteur. Si nous faisons subir au vecteur $\vec{u}$ une rotation de $+90^\circ$, il devient $j \cdot \vec{u}$. De même, si nous

faisons subir au vecteur $j \cdot \vec{u}$ une rotation de $+90^\circ$, il devient $j \cdot j \cdot \vec{u}$, soit $j^2 \cdot \vec{u}$. Or une rotation de deux fois 90° (c'est à dire 180°) correspond à un changement de signe du vecteur $\vec{u}$. Nous avons donc la relation : $j^2 = -1$, j étant appelé *nombre imaginaire*. Une transposition de la représentation de Fresnel est alors facile. Les vecteurs sont décomposés en vecteurs orthogonaux et notés sous la forme : $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$.

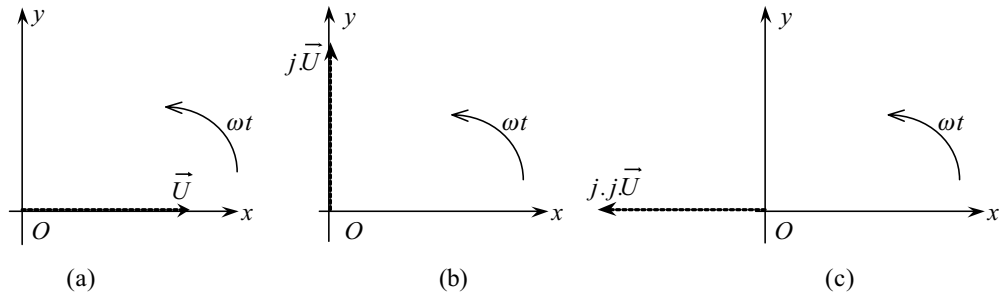


Figure 3.6 Effet de la multiplication par j .

$\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ représentent respectivement les vecteurs projections sur l'axe Ox et sur l'axe Oy . Dans ce cas le vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y = a + jb$$

a et b sont les deux composantes du vecteur auquel nous associons le *nombre complexe* Z : $Z = a + jb$ où a représente la *partie réelle* du nombre complexe et b désigne sa *partie imaginaire*.

Ainsi la grandeur sinusoïdale $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ qui est représentée dans le plan de Fresnel par un vecteur tournant avec la pulsation ω et dont les composantes sont : $U \cos(\phi)$ et $U \sin(\phi)$.

Cette grandeur sinusoïdale s'écrit sous la forme complexe :

$$\underline{u} = U [\cos(\phi) + j \sin(\phi)] = U \cos(\phi) + jU \sin(\phi)$$

$$\underline{u} = (U \cos(\phi)) + (U \sin(\phi)) = U e^{j\phi}$$

La notation concernant $\underline{u}$ désigne le nombre complexe associé à la tension ou au courant. Ainsi, à tout point du plan considéré comme étant le point extrémité d'un vecteur de Fresnel, nous pouvons faire correspondre un nombre complexe noté :

$$S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}$$

La partie réelle de ce nombre complexe est égale à la projection du vecteur de Fresnel sur l'axe des abscisses Ox . Le signal réel $s(t)$ est lié à ce nombre complexe qui le représente par la relation :

$$s(t) = \Re(S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}) = \Re(S_{\text{Max}} e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \Re(\underline{s} \cdot e^{j\omega t})$$

où $\Re$ désigne la partie réelle du nombre complexe.

$\underline{S}$ représente l'amplitude complexe du signal $s(t)$ et permet de reconnaître celui-ci sans ambiguïté. Cette amplitude est indépendante du temps ce qui permet de séparer le terme phase du terme temps.

Tableau 3.1 Correspondance entre représentation de fresnel et représentation complexe

Représentation complexe	Représentation de Fresnel
Nombre complexe : $S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}$	Vecteur de Fresnel de module S_{Max} et de phase instantanée $\omega t + \phi$
Amplitude complexe : $\underline{S} = S_{\text{Max}} e^{j\phi}$	Vecteur de Fresnel à $t = 0$
Signal sinusoïdal réel $s(t)$ $s(t) = \Re \left(S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)} \right)$	Projection du vecteur de Fresnel sur l'axe des abscisses Ox
Signal sinusoïdal réel déphasé de $\pi/2$ $S'(t) = \text{Imaginaire de } S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}$	Projection du vecteur de Fresnel sur l'axe des ordonnées Oy

➤ Opérations linéaires en notation complexe

Comme dans la représentation de Fresnel qui donne une image des différentes grandeurs à un instant donné, pour effectuer des opérations linéaires en notation complexe, nous travaillons uniquement sur les amplitudes complexe, c'est à dire à l'instant $t = 0$. Ce n'est qu'à la fin du calcul que nous rétablissons dans le résultat la quantité $e^{j\omega t}$.

Multiplication par une constante

Le résultat de la multiplication de l'amplitude complexe $S_{\text{Max}} e^{j\phi}$ d'un signal réel $s(t)$ par un scalaire complexe $k' = k e^{j\alpha}$ donne :

$$k e^{j\alpha} \cdot S_{\text{Max}} e^{j\phi} = k S_{\text{Max}} e^{j\phi} e^{j\alpha} = k S_{\text{Max}} e^{j(\phi + \alpha)}$$

Ce résultat traduit une multiplication par la constante k de l'amplitude du signal réel $s(t)$ et un déphasage de celui-ci d'une quantité égale à α .

Changement de l'origine des temps

Nous avons vu que si on pose $t' = t - t_0$, le signal $u(t')$ donne une amplitude inchangée et une phase à l'origine égale à : $\phi + \omega t_0$.

$$s(t) \text{ donne : } S_{\text{Max}} e^{j\phi} \quad \text{et} \quad s(t') \text{ donne : } S_{\text{Max}} e^{j(\phi + \omega t_0)}$$

Pour $t_0 > 0$, nous avançons le signal, ce qui revient à augmenter la phase à l'origine.

Dérivation et intégration par rapport au temps

Comme : $\frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega \sin(\omega t + \phi) = \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$

Cette quantité représente la partie réelle de : $\omega.S_{\text{Max}}e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)}$

$$\Re \left[\omega.S_{\text{Max}}e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)} \right] = \Re \left[\omega.S_{\text{Max}}e^{j(\omega t + \phi)}e^{j\pi/2} \right] = \omega \cdot \cos \left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

La dérivée du signal $s(t)$ par rapport au temps est :

$$\frac{ds}{dt} = \Re [j\omega.S_{\text{Max}}e^{j(\omega t + \phi)}] = \Re [j\omega.S_{\text{Max}}e^{j\phi}e^{j\omega t}] = \Re [j\omega.\underline{S}e^{j\omega t}]$$

La dérivation se traduit par une multiplication de l'amplitude complexe du signal d'origine par la quantité $j\omega$ ce qui revient à une multiplication du module du vecteur par la quantité ω et par un déphasage de $+\pi/2$.

Inversement, l'intégration se traduit par une rotation de $-\pi/2$ et une division du module par la quantité ω . Ceci donne :

$$\int s(t) dt = \Re \left[\frac{S_{\text{Max}}}{j\omega} e^{j\phi} e^{j\omega t} \right] = \Re \left[\frac{\underline{S}}{j\omega} e^{j\omega t} \right]$$



Remarque : Ce résultat n'est valable qu'en régime *sinusoïdal permanent*. En réalité, le fait d'intégrer oblige à rajouter une composante constante. Souvent on peut ne pas tenir compte de ce terme en régime sinusoïdal.

Somme de deux vecteurs de même pulsation

Soit deux vecteurs tensions $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Leurs amplitudes complexes sont respectivement :

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j\phi_1} \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_2 e^{j\phi_2}$$

Cherchons maintenant la somme de ces deux vecteurs. Nous savons que :

$$u_1(t) + u_2(t) = \Re (\underline{U}_1 e^{j\omega t}) + \Re (\underline{U}_2 e^{j\omega t}) = \Re ((\underline{U}_1 + \underline{U}_2) e^{j\omega t})$$

Ce résultat montre que l'amplitude complexe de la somme est égale à la somme des amplitudes complexes (ce qui correspond au résultat trouvé avec les vecteurs de Fresnel). Il est donc inutile d'effectuer le calcul en tenant compte du terme en $e^{j\omega t}$.

3.2 GÉNÉRALISATION DE LA LOI D'OHM

3.2.1 Impédance et admittance complexes

Soit un réseau électrique en régime sinusoïdal permanent. Considérons un dipôle de ce réseau. En régime sinusoïdal ou harmonique, la tension et le courant sont notés :

$$u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{et} \quad i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \psi).$$

Le rapport de $u(t)$ sur $i(t)$ n'est pas significatif du comportement du dipôle. Ce rapport dépend de l'instant t considéré et peut varier entre 0 et 8. En revanche, on sait que la tension et le courant sont représentés par des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re (U_{\text{Max}} e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \Re (\underline{U} e^{j\omega t}) \quad \text{avec : } \underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\phi} \\ i(t) &= \Re (I_{\text{Max}} e^{j\psi} e^{j\omega t}) = \Re (\underline{I} e^{j\omega t}) \quad \text{avec : } \underline{I} = I_{\text{Max}} e^{j\psi} \end{aligned}$$

Nous définissons l'*impédance complexe* $\underline{Z}$ comme le rapport de l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ sur l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{Max}} e^{j\phi}}{I_{\text{Max}} e^{j\psi}} = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} e^{j(\phi-\psi)} = Z e^{j\theta} \\ \text{avec : } Z &= \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} \quad \text{et} \quad \theta = \phi - \psi \end{aligned}$$

Cette quantité *ne dépend plus du temps* mais seulement de la nature des éléments constituant le dipôle. L'impédance est donc un nombre complexe qui est le quotient de deux amplitudes complexes. Le module de $\underline{Z}$ est le quotient des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant, et l'argument est égal à la différence des phases à l'origine. L'inverse de l'impédance s'appelle l'*admittance* $\underline{Y}$.

L'impédance $\underline{Z}$ (ou de l'admittance $\underline{Y}$) était notée sous forme polaire avec un module et un argument, mais nous pouvons aussi les noter sous forme cartésienne :

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{et} \quad \underline{Y} = G + jB$$

L'impédance comporte donc deux termes, l'un réel, l'autre imaginaire. La conformité avec le régime statique impose que la partie réelle soit la résistance R . La partie imaginaire X est appelée la *réactance*. Elles s'expriment toutes les deux en ohm (Ω).

De même, l'admittance se décompose en une somme d'un terme réel noté G qui est appelé la conductance ainsi que d'une partie imaginaire notée B et appelée la *susceptance*. Elles s'expriment toutes les deux en siemens (S) ou en (Ω^{-1}).

À partir de ce moment, nous allons utiliser la notation standard qui consiste à enlever la barre sous la lettre Z ou sous la lettre Y .

$$\underline{Z} = Z = R + jX \quad \text{et} \quad \underline{Y} = Y = G + jB$$

Si nous devons préciser les modules, nous utiliserons la notation classique qui consiste à mettre Z ou Y entre deux barres horizontales :

$$\underline{Z} = R + jX = |Z| e^{j\theta}$$

où $|Z|$ désigne le module et θ l'argument.

Dans le tableau 3.2, nous avons présenté les principales relations de passage :

Tableau 3.2 Récapitulatif des relations de passage.

$Z = R + jX = Z e^{j\theta} = 1/Y$	$Y = G + jB = Y e^{j\chi} = 1/Z$
$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$	$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$
$X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$	$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$
$ Z = \frac{1}{ Y } = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}}$	$ Y = \frac{1}{ Z } = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$
$\tan(\theta) = \frac{X}{R} = -\frac{B}{G}$	$\tan(\chi) = \frac{B}{G} = -\frac{X}{R}$
$\theta = -\chi$	$\chi = -\theta$

3.2.2 Réponses des dipôles élémentaires parfaits

Contrairement au régime statique, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.

a) Résistance

La loi d'Ohm en régime sinusoïdal s'écrit toujours de la même façon et ce, quel que soit l'instant t considéré.

$$u(t) = R i(t)$$

Si au courant $i(t)$, nous faisons correspondre la notation complexe : $\underline{I} = |I_{\text{Max}}| e^{j\psi}$, nous voyons qu'à la tension $u(t)$ nous pouvons faire correspondre : $\underline{U} = |U_{\text{Max}}| e^{j\theta}$ ce qui donne :

$$u(t) = \Re(R \underline{I} e^{j\omega t}) = \Re(\underline{U} e^{j\omega t}) \quad \text{avec :} \quad \underline{U} = R \underline{I}$$

Nous obtenons donc :

$$\underline{U} = R \underline{I} = R \cdot |I_{\text{Max}}| e^{j\psi} = |R \cdot I_{\text{Max}}| e^{j\psi} = |U_{\text{Max}}| e^{j\psi} = |U_{\text{Max}}| e^{j\theta}$$

Les deux arguments (angles) étant identiques $\theta = \psi$, la tension $u(t)$ est de ce fait en phase avec le courant $i(t)$. L'impédance et l'admittance se réduisent à des réels purs qui représentent une résistance et une conductance. Nous avons indiqué à la figure 3.7 (a) la représentation de Fresnel du courant et de la tension.

b) Inductance pure

Nous connaissons d'après le chapitre 1 la relation qui lie la tension $u(t)$ au courant $i(t)$ qui passe dans la bobine.

$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

ce qui donne en notation complexe :

$$\underline{U} = jL\omega \cdot \underline{I} = jX_L \cdot \underline{I} = Z \cdot \underline{I}$$

Nous pouvons aussi retrouver directement ce résultat puisqu'en régime harmonique, si une inductance L est traversée par une intensité $i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t)$, de forme sinusoïdale, nous connaissons la dérivée du courant $i(t)$:

$$\frac{di}{dt} = -\omega \cdot I_{\text{Max}} \sin(\omega t) = -\omega \cdot I_{\text{Max}} \sin(\omega t) = j\omega \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t) = j\omega \cdot i(t)$$

L'impédance Z d'une inductance pure devient :

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{jL\omega I_{\text{Max}} \cos(\omega t)}{I_{\text{Max}} \cos(\omega t)} = jL\omega = jX_L$$

Cette deuxième méthode n'est pas contradictoire avec la remarque faite au début du paragraphe. En effet, nous ne calculons pas le quotient tension sur courant à un instant t déterminé, mais on calcule ce quotient d'une façon globale. Dans ce cas la variable temps t disparaît du résultat final.



Remarque : Dans une inductance, $i(t)$ et $u(t)$ sont déphasés de $+\pi/2$, la tension $u(t)$ est en avance de phase par rapport au courant $i(t)$, ce qui se vérifie puisque l'impédance est un imaginaire pur positif. Nous avons indiqué à la figure 3.7 (b) la représentation de Fresnel du courant et de la tension.

Le même raisonnement s'applique aussi dans le cas d'une inductance mutuelle.

c) Condensateur parfait

Nous pouvons appliquer comme pour la bobine le raisonnement sur les expressions en complexes, mais nous allons utiliser le régime harmonique :

$$u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t), \text{ nous avons donc : } i(t) = C \frac{du}{dt}$$

or la dérivée de la tension $u(t)$ donne :

$$\frac{du}{dt} = \omega \cdot U_{\text{Max}} \sin(\omega t) = j\omega \cdot U_{\text{Max}} \cos(\omega t) = j\omega \cdot u(t)$$

L'impédance d'un condensateur parfait devient :

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_{\text{Max}} \cos(\omega t)}{jC\omega \cdot U_{\text{Max}} \cos(\omega t)} = \frac{1}{jC\omega} = -j \frac{1}{C\omega} = jX_C$$



Remarque : Dans un condensateur, le courant $i(t)$ est en avance de phase par rapport à la tension $u(t)$. Le déphasage indiqué sur la figure 3.7 (c) est de $-\pi/2$. Ce déphasage se vérifie dans l'expression de l'impédance puisque Z est un imaginaire pur négatif.

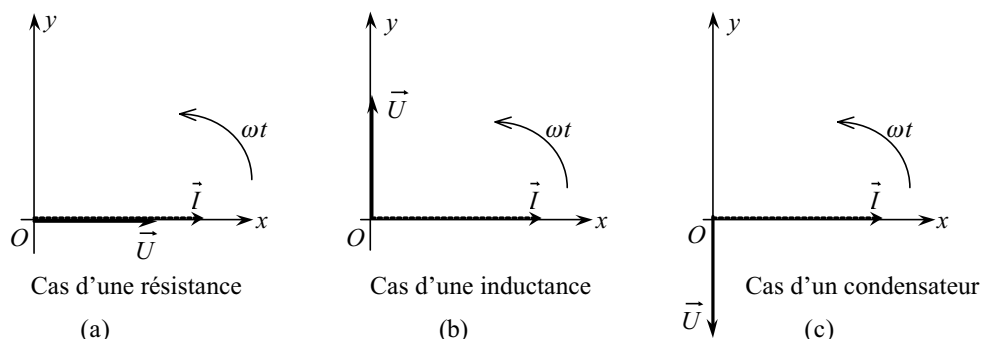


Figure 3.7 Déphasage entre courant et tension pour une résistance, une inductance et un condensateur.

3.2.3 Association d'éléments

Nous pouvons procéder comme pour l'association des résistances. En effet, dans le domaine des fréquences, la relation : $\underline{U} = Z.\underline{I}$ est formellement identique à la loi d'Ohm. Par conséquent, les impédances complexes s'associent comme les résistances :

- association d'impédances en série : $Z_{\text{équivalente}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$;
- association d'impédances en parallèle : $1/Z_{\text{équivalente}} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + \dots + 1/Z_n$;

De la même façon, en remplaçant l'impédance Z par $1/Y$, nous trouvons :

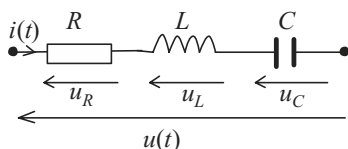
- association d'admittances en série : $1/Y_{\text{équivalente}} = 1/Y_1 + 1/Y_2 + \dots + 1/Y_n$;
- association d'admittances en parallèle : $Y_{\text{équivalente}} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

En appliquant les principes d'associations précédentes dans les cas particuliers de deux inductances ou deux condensateurs (ou bien plusieurs éléments), nous pouvons dresser le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Association des condensateurs et des selfs parfaits

	Association en série	Association en parallèle
Inductances	$L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$	$\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}$
Condensateurs	$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$	$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$

a) Association de dipôles parfaits en série

Figure 3.8 Association en série de R , L et C .

Prenons par exemple l'association en série des trois éléments de bases qui sont une résistance, une inductance et un condensateur. Le même courant $i(t)$ circule dans les trois éléments, la tension $u(t)$ devient :

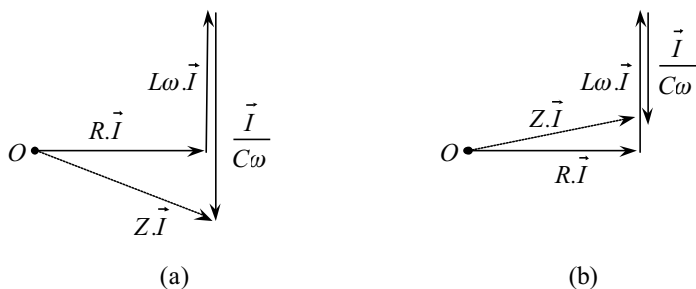
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Puisque nous traitons le régime sinusoïdal permanent, les bornes d'intégration et la condition initiale sur la tension aux bornes du condensateur n'auront pas d'effet. Nous aboutissons donc à une équation intégral-différentielle à coefficients constants que nous résolvons par les méthodes habituelles.

L'opérateur intégral-différentiel étant linéaire, nous pouvons associer à $i(t)$ et $u(t)$ leurs notations complexes, ce qui donne :

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \cdot \underline{I} + jL\omega \underline{I} + \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$$

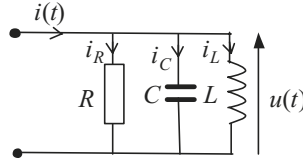
$$\underline{U} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \cdot \underline{I} = \underline{Z} \times \underline{I}$$

Figure 3.9 Représentation de Fresnel : Z est capacitive (a) ou inductive (b).

Z étant l'impédance complexe du dipôle RLC série. Il s'agit de la loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal. La représentation de Fresnel bien que « non nécessaire » permet de comprendre le comportement du circuit. En effet, suivant que $L\omega$ est supérieur ou inférieur à $1/C\omega$, la réactance de l'ensemble est positive ou négative ce qui revient à dire : L'impédance a un comportement inductif ou bien capacitif.

b) Association de dipôles parfaits en parallèle

Étudions la mise en parallèle d'une résistance, d'une inductance et d'un condensateur.

Figure 3.10 Association en parallèle de R , L et C .

La même tension $u(t)$ est commune au trois éléments, le courant $i(t)$ devient :

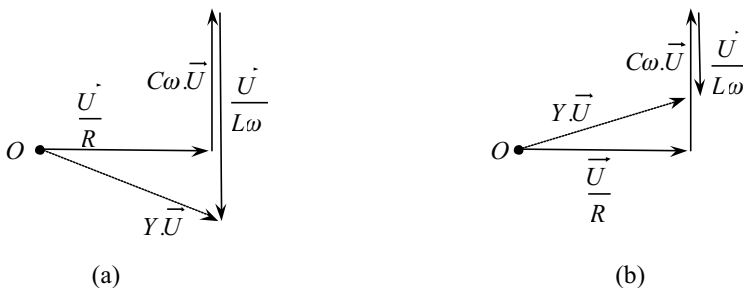
$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C \frac{du(t)}{dt}$$

ce qui donne en utilisant la notation complexe :

$$\underline{I} = \left(\frac{1}{R} \underline{U} \right) + \left(\frac{1}{jL\omega} \underline{U} \right) + (jC\omega \underline{U}) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right) \underline{U} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{I} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] \underline{U} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Y étant l'admittance complexe du dipôle RLC parallèle. Il s'agit de loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal. La représentation de Fresnel de la figure 3.11 montre le comportement du circuit. En effet, suivant que $1/L\omega$ est supérieur ou inférieur à $C\omega$, la susceptance de l'ensemble est positive ou négative ; autrement dit l'admittance a un comportement inductif ou bien capacitif.

Figure 3.11 Représentation de Fresnel : Y est inductive (a) ou capacitive (b).

Remarque : Ces deux exemples montrent d'une part que les impédances complexes d'éléments en série s'ajoutent, et que d'autre part les admittances complexes en parallèle s'ajoutent également. Il ne faut toutefois jamais oublier que la solution physique est la *partie réelle* de la solution complexe.

3.2.4 Méthodes d'étude

Toutes les règles et théorèmes donnés pour les réseaux en régime statique restent valables à condition de raisonner dans le domaine complexe. Nous pouvons citer le diviseur de tension ou de courant ou encore les théorèmes de Thévenin ou de Norton. Souvent l'étude en régime sinusoïdal se rapporte à l'un des thèmes suivants :

- Étude à fréquence fixe : c'est le cas, par exemple, en triphasé avec une fréquence EDF fixé à 50 Hz. Nous pouvons chercher à calculer le courant et la tension d'une branche, nous pouvons nous intéresser à la puissance et aux problèmes d'adaptation par une cellule particulière du type *LC*.
- Étude à fréquence variable : dans ce cas, il s'agit souvent de tracer les courbes de Bode. Pour résoudre ce genre de problème, nous faisons souvent appel à l'étude des quadripôles en régime sinusoïdal (chapitre 4).
- Étude pour connaître la réponse à une variation brusque de tension ou de courant. Nous pouvons aussi vérifier la stabilité du système en régime transitoire ou en régime quelconque (chapitre 5).

Il existe un théorème supplémentaire pour le traitement des inductances mutuelles : le théorème de Rosen qui permet d'éliminer certaines mutuelles-inductances dans les réseaux.

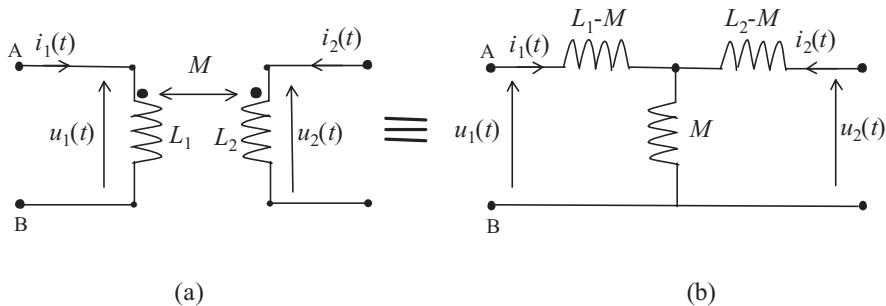


Figure 3.12 Principe de la transformation de Rosen.

Sur la figure 3.12 (a), la différence de potentiel entre les bornes A et B est :

$$u_1 = jL_1\omega i_1 + jM\omega i_2$$

Le terme $jL_1\omega i_1$ correspond à la chute de tension produite par le passage du courant i_1 dans l'enroulement d'inductance L_1 , et le terme $jM\omega i_2$ correspond à la tension induite par le couplage par mutuelle-inductance en utilisant la convention donnée à la figure 3.12 (b).

Sur la figure 3.12 (b), vu des mêmes bornes A et B, nous trouvons :

$$u_1 = j(L_1 - M)\omega i_1 + jM\omega (i_1 + i_2)$$

puisque l'inductance M est traversée par la somme des deux courants i_1 et i_2 . Pour que les tensions u_1 des deux schémas soient égales, il faut que l'inductance placée à

l'entrée A soit égale à $L_1 - M$. En procédant de même, pour les deux autres bornes, nous trouvons l'identité illustrée par la figure 3.12. Le nouveau schéma ne comporte alors plus aucune mutuelle-inductance.

3.2.5 Exemple d'étude : le circuit RC série

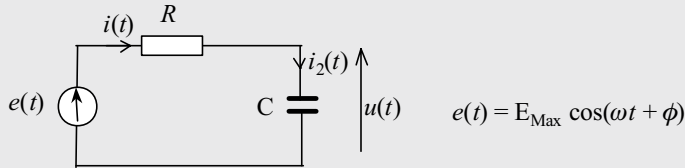


Figure 3.13 Cas d'un circuit RC série.

Nous supposons le régime sinusoïdal permanent et nous désirons déterminer l'expression du courant $i(t)$ ainsi que celle de la tension $u(t)$.

Pour déterminer l'équation du circuit, nous appliquons la loi des mailles :

$$e(t) - Ri(t) - \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

L'opérateur intégral-différentiel étant linéaire, nous pouvons utiliser les notations complexes pour le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$.

$$e(t) \rightarrow E_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{E} e^{j\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{E} = E_{\text{Max}} e^{j\phi}$$

$$i(t) \rightarrow I_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{I} e^{j\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{I} = I_{\text{Max}} e^{j\varphi}$$

$$u(t) \rightarrow U_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \psi)} = \underline{U} e^{j\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\psi}$$

En dérivant l'équation précédente, nous trouvons :

$$\frac{de(t)}{dt} - R \frac{di(t)}{dt} - \frac{i(t)}{C} = 0$$

Ce résultat donne en notation complexe :

$$(j\omega \cdot \underline{E} e^{j\omega t}) - (j\omega R \cdot \underline{I} e^{j\omega t}) - \left(\frac{1}{C} \cdot \underline{I} e^{j\omega t} \right) = 0$$

$$(j\omega \cdot \underline{E}) - (j\omega R \cdot \underline{I}) - \left(\frac{1}{C} \underline{I} \right) = 0 \quad \text{soit :} \quad \underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

Nous déduisons l'amplitude et la phase du courant $i(t)$:

– l'amplitude du courant est donnée par le module du courant complexe :

$$|\underline{I}| = |I_{\text{Max}} e^{j\varphi}| = I_{\text{Max}} = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

– la phase à l'origine du courant est déterminée en utilisant l'égalité :

$$\underline{I} = I_{\text{Max}} e^{j\varphi} = \frac{E_{\text{Max}} e^{j\phi}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E_{\text{Max}} e^{j\phi}}{1 + jRC\omega} (jC\omega)$$

ce qui donne :

$$\varphi = \phi + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(RC\omega)$$

Par ailleurs, nous avons la relation qui lie le courant et la tension aux bornes du condensateur en régime sinusoïdal. Cette relation s'écrit en notation complexe :

$$\underline{U} = \underline{I} \frac{1}{jC\omega} \quad \text{soit :} \quad \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Nous en déduisons l'amplitude de $u(t)$ ainsi que sa phase à l'origine :

$$|\underline{U}| = |\underline{U}_{\text{Max}} e^{j\psi}| = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad \text{et} \quad \psi = \phi - \text{Arctan}(RC\omega)$$

Nous pouvons donc tirer les résultats suivants :

$$u(t) = \frac{E_M}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \phi - \text{Arctan}(RC\omega))$$

$$i(t) = \frac{C\omega \cdot E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(RC\omega)\right)$$

3.3 PUISSANCE ET ÉNERGIE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Soit un dipôle passif, constitué par un ou plusieurs éléments simples. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$. Nous trouvons à ses bornes une tension sinusoïdale $u(t)$. Nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

3.3.1 La puissance instantanée

La puissance instantanée consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Nous distinguons deux cas selon le signe de $p(t)$:

- $p(t)$ est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur ;
- $p(t)$ est négatif, le dipôle renvoie de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.

En régime sinusoïdal permanent, $u(t)$ et $i(t)$ se mettent sous la forme :

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_2)$$

d'où

$$p(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_2) \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_1)$$

soit en utilisant la relation trigonométrique classique suivante

$$\cos(p) \cdot \cos(q) = 0,5 [\cos(p - q) + \cos(p + q)]$$

Nous trouvons l'expression de la puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

$$p(t) = \frac{U_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \frac{I_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

$$p(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

Pour simplifier le calcul, nous pouvons supposer par exemple que la phase du courant est nulle, $\phi_1 = 0$, ce qui consiste à prendre le courant comme référence. La puissance instantanée exprimée par la relation précédente comporte alors un terme constant qui représente la valeur moyenne de la puissance :

$$U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\phi_2) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\Delta\phi) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\phi)$$

et un terme sinusoïdal :

$$U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(2\omega t + \Delta\phi).$$

La pulsation de l'expression de la puissance instantanée est deux fois la pulsation du signal sinusoïdal (2ω au lieu de ω). Si le terme constant est nul, la puissance est donc alternativement positive et négative durant une demi-période du signal courant ou du signal tension.

3.3.2 La puissance moyenne

La puissance instantanée étant variable au cours du temps, il est souvent plus intéressant de connaître la *puissance moyenne sur une durée T* à partir de l'instant t_0 . Cette puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active :

$$P_{\text{moyenne}} = P_{\text{active}} = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t) dt$$

La puissance moyenne dissipée sur une période de la sinusoïde est :

$$P_{\text{active}} = P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)] dt$$

$$P_{\text{active}} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_2 - \phi_1) dt + \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + \phi_2 + \phi_1) dt$$

Pour que le résultat de l'intégration soit indépendant de l'instant t_0 , il faut intégrer sur une période entière. De ce fait, le deuxième terme de l'équation précédente est nul puisque la valeur moyenne d'un $\cos(\theta)$ est nulle. Il ne reste alors que les termes indépendants du temps d'où :

$$P_{\text{active}} = P_{\text{moyenne}} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_2 - \phi_1) dt = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$P_{\text{active}} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} \cos(\Delta\phi) = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} \cos(\varphi) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

où $\varphi = \Delta\phi$ représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes. La puissance moyenne est toujours positive ou nulle, à U_{eff} et I_{eff} donnés ; la puissance active est maximale dans le cas particulier d'une charge purement résistive : $Z = R$. La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont donc en phase ce qui donne : $\cos(\varphi) = 1$, nous trouvons :

$$P_{\text{active}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 \cdot R$$

Pour une charge purement réactive « imaginaire pure », $\varphi = \pm 90^\circ$, $\cos(\varphi) = 0$ et la puissance moyenne est nulle, autrement dit, un condensateur idéal ou une inductance idéale ne dissipe aucune puissance moyenne.

Dans le cas général, la puissance moyenne ou puissance active s'exprime par la relation :

$$P_{\text{moyenne}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

$\cos(\varphi)$, qui représente le rapport de P_{moyenne} sur le produit $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ s'appelle facteur de puissance. Sa valeur est comprise entre 0 et 1.

En utilisant la notation complexe, nous obtenons :

$$u(t) = U_{\text{Max}} \cdot \Re(e^{j(\omega t + \phi_2)}) \quad \text{et} \quad i(t) = I_{\text{Max}} \cdot \Re(e^{j(\omega t + \phi_1)})$$

Étant donné que la pulsation n'intervient pas dans le calcul de la puissance moyenne sur une période, les tensions u et i peuvent s'écrire :

$$u = U_{\text{Max}} \cdot \Re e^{+j\phi_2} \quad \text{et} \quad i = I_{\text{Max}} \cdot \Re e^{+j\phi_1}$$

d'où :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \Re(u \cdot i^*) = \frac{1}{2} \Re(i \cdot u^*)$$

D'après la définition de l'impédance, la tension et le courant sont liés par l'expression de Z : il vient que, si $Z = R + jX$:

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{2} \Re(Z \cdot i \cdot i^*) = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \Re(Z) = \frac{1}{2} R i^2$$

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{2} R \left(\frac{u}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{u^2}{R}$$

3.3.3 Puissance active et puissance réactive

Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source. Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative. La puissance impliquée dans cet échange est désignée par la puissance réactive : $P_{\text{réactive}}$.

Si nous développons l'expression générale de la puissance instantanée, nous trouvons :

$$p(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

Pour simplifier le calcul, nous supposons que $\phi_1 = 0$. Dans ce $\Delta\phi = \phi_2$, nous trouvons :

$$p(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} [\cos(\phi_2 - 0) + \cos(2\omega t + 0 + \phi_2)]$$

$$p(t) = [U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\Delta\phi)] + [U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(2\omega t + \Delta\phi)]$$

$$p(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\Delta\phi) + U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} [\cos(2\omega t) \cos(\Delta\phi) - \sin(2\omega t) \sin(\Delta\phi)]$$

$$p(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} [1 + \cos(2\omega t)] \cdot \cos(\Delta\phi) - U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(\Delta\phi) \sin(2\omega t)$$

La puissance instantanée contient deux termes. Le premier correspond à la puissance active et le second à la puissance réactive.

$$p_{\text{active}}(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} [1 + \cos(2\omega t)] \times \cos(\Delta\phi)$$

$$p_{\text{réactive}}(t) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin(2\omega t) \times \sin(\Delta\phi)$$

Notons ici que la puissance active mesurée sur une période entière donne le même résultat que précédemment puisque la moyenne de $\cos(2\omega t)$ est nulle sur une période.

Ces dénominations sont justifiées par les considérations suivantes. Supposons une impédance d'un dipôle donnée sous la forme standard : $Z = R + jX$.

La tension aux bornes de l'impédance devient :

$$u(t) = \Re [U_{\text{Max}} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Re [\underline{U} e^{j\omega t}] \quad \text{avec : } \underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\phi}$$

Or, $\underline{U} = Z \cdot \underline{I}$ est la loi d'Ohm en notation complexe :

$$u(t) = \Re [R + jX] I_{\text{Max}} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = [R \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t)] - [X \cdot I_{\text{Max}} \sin(\omega t)]$$

La puissance instantanée devient :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [R \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t) - X \cdot I_{\text{Max}} \sin(\omega t)] [I_{\text{Max}} \cos(\omega t)]$$

$$p(t) = \left[\frac{R \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \right] - \left[\frac{X \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} \sin(2\omega t) \right]$$

Si nous comparons cette expression de la puissance avec celle trouvée auparavant, nous constatons que le premier terme correspond à la puissance *active* qui met en jeu la partie *résistive* R de l'impédance Z . La deuxième partie de l'expression correspond à la puissance *réactive* qui met en jeu la *réactance* X de l'impédance Z :

$$p_{\text{active}}(t) = \frac{R.I_{\text{Max}}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$p_{\text{réactive}}(t) = \frac{X.I_{\text{Max}}^2}{2} \sin(2\omega t)$$

La puissance active a pour valeur moyenne la puissance moyenne déterminée auparavant. Il s'agit bien de :

$$\overline{p_{\text{active}}(t)} = \frac{R.I_{\text{Max}}^2}{2} = \frac{U_{\text{Max}}.I_{\text{Max}}}{2} \cos(\varphi) = \frac{U_{\text{Max}}.I_{\text{Max}}}{2} \cos(\Delta\phi)$$

Nous constatons que la puissance réactive change de signe à une fréquence double de celle du signal : elle est tour à tour emmagasinée puis restituée par les réactances, de sorte que le bilan moyen est nul. Elle ne correspond pas à un transfert d'énergie.

Conclusion : La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle. En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance. Nous utilisons alors (surtout en électrotechnique) le terme de *puissance active* pour dénommer la puissance moyenne. La quantité $U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$ appelée *puissance réactive*, ne prend en compte que l'échange de puissance dans le terme réactif de l'impédance. L'unité de puissance réactive est le volt-ampère-réactif (VAR). Enfin, la puissance calculée en effectuant le produit de la tension par le courant sans tenir compte du déphasage entre la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ est appelée puissance apparente. Elle s'exprime en Volt-Ampère (VA).

3.3.4 Compléments sur les puissances

a) Puissance maximale transférée

Considérons une charge d'utilisation noté Z_U branchée sur un générateur de tension sinusoïdal de force électromotrice e_g et d'impédance interne Z_g . Calculons la valeur de Z_U pour laquelle la puissance active fournie est maximale. Nous notons :

$$Z_g = R_g + jX_g \quad ; \quad Z_U = R_U + jX_U \quad ; \quad e_g = E_g \cos(\omega t)$$

En utilisant la notation complexe, la puissance complexe fournie par le générateur est :

$$\underline{p} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{i}^*}{2} \quad \text{avec} \quad \underline{u} = \underline{Z}_U \cdot \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{i} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_U + \underline{Z}_g} = \frac{\underline{E}_g}{(R_U + R_g) + j(X_U + X_g)}$$

Nous déduisons l'expression de la puissance complexe :

$$\underline{P} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{i} \cdot \underline{i}^*}{2} = \frac{\underline{E}_g^2}{2 \left[(R_U + R_g)^2 + (X_U + X_g)^2 \right]} (R_U + jX_U)$$

La puissance moyenne (active) fournie à la charge est donnée par la partie réelle de la puissance complexe. Nous obtenons :

$$P_{\text{active}} = \Re(\underline{P}) = \frac{\underline{E}_g^2}{2 \left[(R_U + R_g)^2 + (X_U + X_g)^2 \right]} \cdot R_U$$

Le dénominateur étant la somme de deux termes positifs, sa valeur minimale correspond à : $X_U = -X_g$, cette condition est réalisable puisque les réactances peuvent être positives ou négatives. Si cette condition est respectée, l'expression de la puissance devient :

$$P_{\text{active}} = \frac{\underline{E}_g^2}{2 (R_U + R_g)^2} R_U$$

Cette puissance est maximale si la dérivée de l'expression de P par rapport à la variable R_U est nulle :

$$\frac{dP_{\text{active}}}{dR_U} = \frac{\underline{E}_g^2}{2} \times \frac{(R_U + R_g)^2 - 2R_U \cdot (R_U + R_g)}{(R_U + R_g)^4} = 0 \text{ ce qui donne : } R_U = R_g.$$

$$P_{\text{active (Max)}} = \frac{\underline{E}_g^2}{2 (R_g + R_g)^2} \cdot R_g = \frac{\underline{E}_g^2}{8 \cdot R_g} = \frac{\underline{E}_g^2}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot R_g} = \frac{\underline{E}_g^2(\text{efficace})}{4 \cdot R_g}$$

Cette puissance disponible (ou utilisable) dépend de la source ; elle augmente avec la force électromotrice de la source. Elle est d'autant plus élevée que la partie réelle de l'impédance interne est faible.

La condition d'adaptation de la charge à la source impose $Z_u = Z_g^*$. Il est évident que nous pouvons transformer la source de Thévenin en son équivalent de Norton. La condition d'adaptation reste toujours la même et ne dépend pas du mode de représentation de la source réelle.



Remarque : Attention à ne pas croire que l'adaptation d'une charge à une source doit être systématique. Tout dépend de ce que nous cherchons. Nous pouvons par exemple chercher à avoir le maximum de tension au début d'une chaîne d'amplification et un maximum de courant à la fin de cette chaîne. Dans ce cas, nous ne cherchons plus l'adaptation d'impédance et un raisonnement particulier doit être fait pour mener à bien le calcul.

b) Généralisation : Puissance complexe

Nous pouvons généraliser la notion de puissance en utilisant la notation complexe :

$$\underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\phi_1} \quad \text{et} \quad \underline{I} = I_{\text{Max}} e^{j\phi_2}$$

$$\underline{P} = \frac{\underline{U} \cdot \underline{I}^*}{2} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} e^{j\varphi} = P_{\text{active}} + jP_{\text{réactive}}$$

Le symbole « * » désigne le complexe conjugué et $\underline{P}$ est appelée puissance complexe.

► Valeur efficace et puissance apparente

Nous rappelons que la valeur efficace d'une tension (ou d'un courant) est la valeur de la tension (ou du courant) qui reproduirait une dissipation de puissance égale à la puissance active dissipée dans le même dipôle :

$$P_{\text{active}} = \frac{U_{\text{Max}} \cdot I_{\text{Max}}}{2} \cos(\varphi) = \frac{U_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi)$$

Le produit des valeurs efficaces est appelé *puissance apparente*. Cette grandeur est sans signification physique particulière. Sa valeur est toujours supérieure ou égale à la puissance active et s'exprime en volt-ampère.

► Théorème de Boucherot

La puissance active fournie à un dipôle est égale à la somme des puissances actives consommées par les différents éléments qui constituent le dipôle. La puissance réactive échangée avec un dipôle est égale à la somme des puissances réactives échangées par les différents éléments qui constituent le dipôle.

Or, tout dipôle est constitué d'une association en série (et) ou en parallèle d'un certain nombre d'éléments. Nous démontrons, en utilisant les constructions de Fresnel dans le cas d'une association série et dans le cas d'une association en parallèle et par conséquent dans tous les cas, le théorème de Boucherot cité au début de ce paragraphe.

3.3.5 Cas des inductances et des condensateurs réels

a) Inductance réelle

La résistance du fil qui sert pour réaliser une inductance n'est pas rigoureusement nulle. Pour tenir compte de la dissipation d'énergie (pertes) dans l'inductance réelle, il convient soit de représenter cette inductance par l'association en série d'une résistance r_s avec une inductance pure L_s , soit par l'association en parallèle d'une résistance R_p avec une inductance L_p . Souvent les valeurs de L_s et L_p sont proches, nous supposons de ce fait que ces deux valeurs sont identiques : $L_s = L_p = L$

Nous allons mener l'étude en supposant que les deux éléments r_S et L_S sont en série. L'impédance équivalente à l'inductance réelle est la somme des impédances de chaque élément en tenant compte des phases respectives, ce qui s'écrit en utilisant la notation complexe : $Z = r_S + j L \omega$

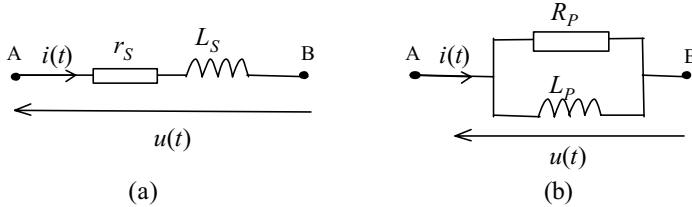


Figure 3.14 Équivalence série (a) et parallèle (b) d'une bobine réelle.

Si nous remplaçons dans l'expression de la puissance instantanée R par r_S et X par $L\omega$, cette puissance instantanée s'écrit alors :

$$p(t) = \left[\frac{r_S \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \right] - \left[\frac{L\omega \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} \sin(2\omega t) \right]$$

ce qui donne l'expression de l'énergie réactive $w_{\text{réactive}} = w_r(t)$:

$$w_r(t) = \frac{L\omega \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} \int_0^t \sin(2\omega t) \, dt = \frac{L\omega \cdot I_{\text{Max}}^2}{4\omega} [\cos(2\omega t) + 1]$$

Cette expression passe par une valeur maximale chaque fois que le courant est maximum en valeur absolue, c'est à dire lorsque $\cos(2\omega t) = 1$, c'est-à-dire pour des valeurs de la variable temps : $t = \pi/\omega$, $t = 2\pi/\omega$... Les courbes du courant et de la puissance sont indiquées à la figure 3.13 (a) et (b).

L'expression de l'énergie active est :

$$w_{\text{active}}(t) = \frac{r_S \cdot I_{\text{Max}}^2}{2} \int_0^t \cos(2\omega t) \, dt = \frac{r_S \cdot I_{\text{Max}}^2}{4\omega} t$$

Nous mesurons la qualité d'une bobine par son coefficient de qualité noté Q_L . Ce coefficient représente le rapport de l'énergie réactive sur l'énergie active au cours d'une période.

$$Q_L = 2\pi \frac{\text{Énergie réactive (électromagnétique) maximale emmagasinée sur une période}}{\text{Énergie active dissipée au cours d'une période}}$$

$$Q_L = 2\pi \frac{W_r(T)}{W_a(T)} = 2\pi \frac{L\omega \cdot I_{\text{Max}}^2}{2\omega} \frac{4\omega}{r_S \cdot I_{\text{Max}}^2 \cdot T} = \frac{L\omega}{r_S}$$

$$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{L\omega}{r_S} = \frac{P_{\text{réactive}}}{P_{\text{active}}} = \tan(\varphi)$$

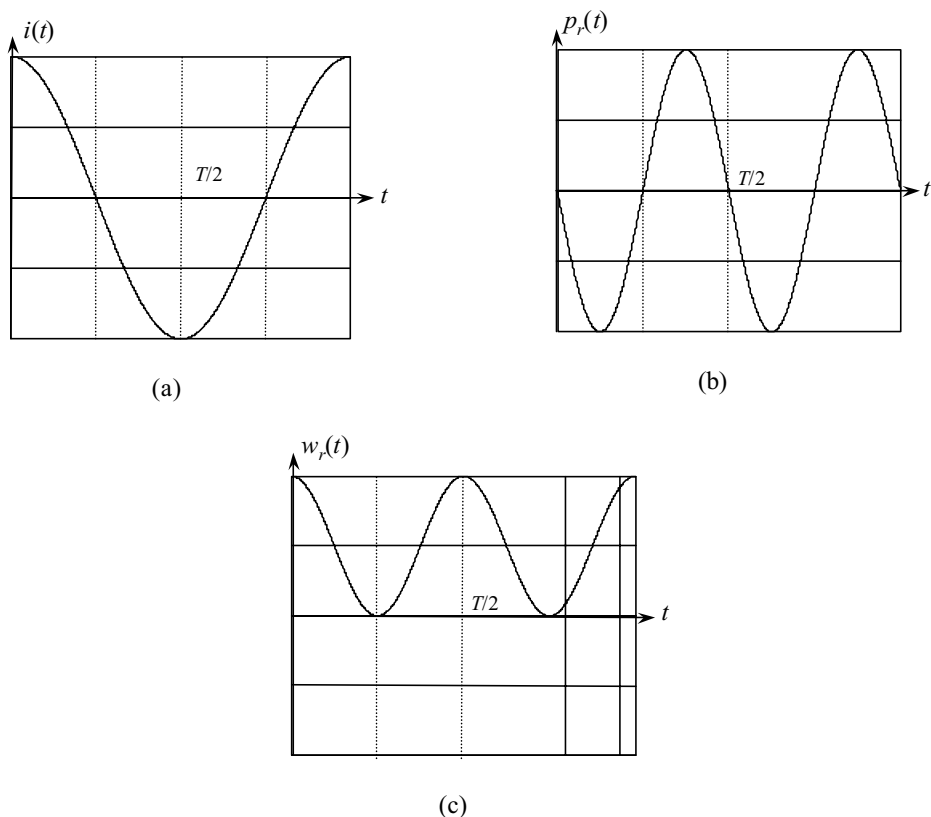


Figure 3.15 Courbes du courant (a), de la puissance (b) et de l'énergie réactive (c).

La bobine se comporte d'autant plus comme une inductance pure que son coefficient de qualité Q_L est grand, c'est à dire que sa résistance série est faible, ce qui revient aussi à dire que le déphasage entre le courant et la tension tend vers $\pi/2$.



Remarque 1 : L'expression du coefficient de qualité montre que Q_L est définie à une pulsation ω bien déterminée. Ceci revient à dire que si ω varie, le coefficient de qualité Q_L varie aussi.

Remarque 2 : Nous définissons quelquefois le facteur de pertes par le rapport : $2\pi/Q_L$

b) Condensateur réel

Le condensateur idéal n'est pas un composant réalisable physiquement. En effet, l'isolant placé entre les deux armatures du condensateur n'est jamais à résistivité infinie. Pour tenir compte des fuites de l'isolant qui se traduit par une dissipation

d'énergie dans le condensateur réel, il convient d'ajouter soit une résistance en parallèle sur le condensateur idéal, soit une résistance en série avec le condensateur idéal.

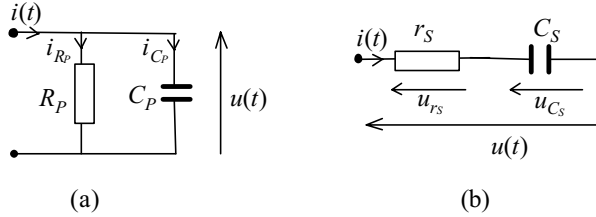


Figure 3.16 Équivalence parallèle (a) et série (b) d'un condensateur réel.

Étudions le premier cas. L'admittance du condensateur réel se calcule à partir de la loi d'association des dipôles en parallèle, ce qui donne :

$$Y = G + jB \quad \text{avec :} \quad G = \frac{1}{R_P} \quad \text{et} \quad B = C_P \omega$$

Calculons la puissance instantanée en utilisant les grandeurs G et B :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad \text{avec :}$$

$$u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = \Re((G + jB) \cdot U_{\text{Max}} e^{j\omega t}) = GU_{\text{Max}} \cos(\omega t) - BU_{\text{Max}} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{G \cdot U_{\text{Max}}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) - \frac{B \times U_{\text{Max}}^2}{2} \sin(2\omega t)$$

Comme pour la bobine, nous trouvons deux parties : la première quantité concerne la puissance active et la deuxième représente la puissance réactive.

$$p_{\text{active}}(t) = \frac{G \cdot U_{\text{Max}}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$p_{\text{réactive}}(t) = -\frac{B \times U_{\text{Max}}^2}{2} \sin(2\omega t)$$

Nous savons aussi que :

➤ $\frac{G \cdot U_{\text{Max}}^2}{2} = \frac{R \cdot I_{\text{Max}}^2}{2}$ est la valeur moyenne de la puissance active

➤ $\frac{B \cdot U_{\text{Max}}^2}{2} = \frac{X \cdot I_{\text{Max}}^2}{2}$ représente l'amplitude de la puissance active

Un calcul analogue à celui fait pour la bobine donne :

$$w_{\text{réactive}}(t) = \frac{B \cdot U_{\text{Max}}^2}{4\omega} (1 + \cos(2\omega t)) = \frac{B}{2\omega} u^2(t)$$

La puissance réactive s'annule chaque fois que $u(t)$ s'annule et a pour fréquence le double de celle de $u(t)$. Nous pouvons chiffrer la qualité d'un condensateur par un

coefficient de qualité analogue à celui de la bobine mais l'usage veut plutôt que l'on utilise son inverse, appelé *tangente de l'angle de perte*.

$$\tan(\delta) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\text{Énergie active dissipée au cours d'une période}}{\text{Énergie réactive maximale emmagasinée sur une période}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{W_a(T)}{W_r(T)} = \frac{G}{B} = \frac{1}{R_P C_P \omega}$$

Le condensateur réel se rapproche d'autant plus du condensateur idéal que la quantité $R_P C_P \omega$ est élevée. Nous notons aussi que la tangente de l'angle de perte n'est valable qu'à une pulsation particulière.

c) Équivalence série-parallèle

Nous avons donné précédemment deux schémas électriques qui modélisent soit le comportement de l'inductance réelle, soit le comportement du condensateur réel. Ces schémas, présentés sous forme série ou parallèle selon l'élément considéré, ont été établis à partir de considérations physiques.

Montrons que, pour un même élément, à une fréquence donnée, il existe deux représentations équivalentes : l'une parallèle et l'autre série. Pour cela, considérons les deux circuits de la figure 3.17 composés d'une résistance pure R et d'une réactance pure X .

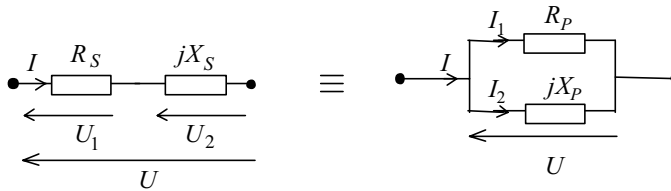


Figure 3.17 Équivalence série et parallèle d'un dipôle quelconque.

Ces deux circuits sont équivalents, s'ils ont une même impédance, c'est-à-dire si :

$$Z = R_S + jX_S = \frac{1}{Y_P} = \frac{1}{\frac{1}{R_P} + \frac{1}{jX_P}}$$

Cela donne :

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{R_S} = R_S \left(1 + \frac{X_S^2}{R_S^2} \right)$$

$$X_P = \frac{R_S^2 + X_S^2}{X_S} = X_S \left(1 + \frac{R_S^2}{X_S^2} \right)$$

Le coefficient de qualité Q_S d'un circuit série étant égal au rapport de la réactance X_S sur la résistance R_S les relations précédentes s'écrivent :

$$R_P = R_S (1 + Q_S^2) \quad \text{et} \quad X_P = X_S \left(1 + \frac{1}{Q_S^2}\right)$$

Si la valeur du coefficient de qualité Q_S est suffisamment élevée, nous trouvons les relations suivantes :

$$R_P \approx R_S Q_S^2 \quad \text{et} \quad X_P \approx X_S$$

$$Q = Q_S = \frac{X_S}{R_S} = Q_P = \frac{R_P}{X_P}$$



Remarque : Les coefficients de qualité des deux circuits sont bien évidemment égaux puisque les circuits sont équivalents. Le coefficient de qualité est d'autant plus élevé que le composant réel ressemble plus à un composant réactif pur.

Nous pouvons résumer les résultats précédents dans le tableau 3.4 :

Tableau 3.4 Relations de passage pour les composants réels.

Bobine réelle	Condensateur réel
$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{L_S \omega}{R_S} = \frac{R_P}{L_P \omega}$	$\tan(\delta) = \frac{G}{B} = \frac{1}{R_P C_P \omega} = R_S C_S \omega$
$R_S = R_P \times \frac{1}{1 + Q_L^2}, \quad L_S = L_P \times \frac{Q_L^2}{1 + Q_L^2}$	$R_S = R_P \times \frac{\tan^2(\delta)}{1 + \tan^2(\delta)}, \quad C_S = C_P (1 + \tan^2(\delta))$
$R_P = R_S \times (1 + Q_L^2), \quad L_P = L_S \times \frac{1 + Q_L^2}{Q_L^2}$	$R_P = R_S \times \frac{(1 + \tan^2(\delta))}{\tan^2(\delta)}, \quad C_P = \frac{C_S}{1 + \tan^2(\delta)}$

3.4 SYSTÈMES TRIPHASÉS

3.4.1 Définitions

Les systèmes monophasés étudiés précédemment ne présentent en général un intérêt que pour les faibles puissances. Pour les grandes puissances (distribution d'énergie, alimentation des moteurs), on utilise souvent le système triphasé.

Considérons pour cela trois générateurs de tensions sinusoïdales identiques de même fréquence et de même amplitude, déphasés l'un par rapport à l'autre d'une phase égale à $2\pi/3$. Si on suppose par exemple que ces trois générateurs alimentent trois récepteurs identiques, les courants qui circulent dans les trois récepteurs seront identiques et déphasés l'un par rapport à l'autre d'une quantité égale à $2\pi/3$.

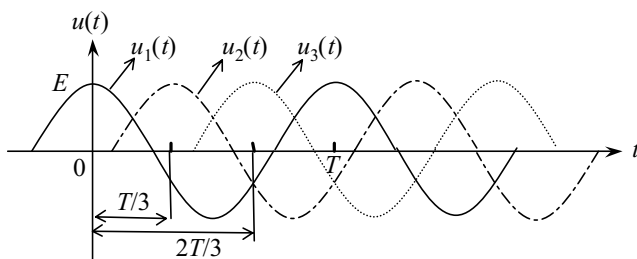


Figure 3.18 Représentation cartésienne du système triphasé.

- $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$ donne dans R_1 un courant : $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t - \phi)$;
- $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t - 2\pi/3)$ donne dans R_2 un courant : $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t - 2\pi/3 - \phi)$;
- $u_3(t) = U_3 \cos(\omega t - 4\pi/3)$ donne dans R_3 un courant : $i_3(t) = I_3 \cos(\omega t - 4\pi/3 - \phi)$.

L'ensemble ainsi constitué représente un système triphasé symétrique qui fonctionne en régime sinusoïdal équilibré. Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, les tensions et les courants relatifs au système triphasé peuvent être représentés sous forme vectorielle ou représentation de Fresnel.

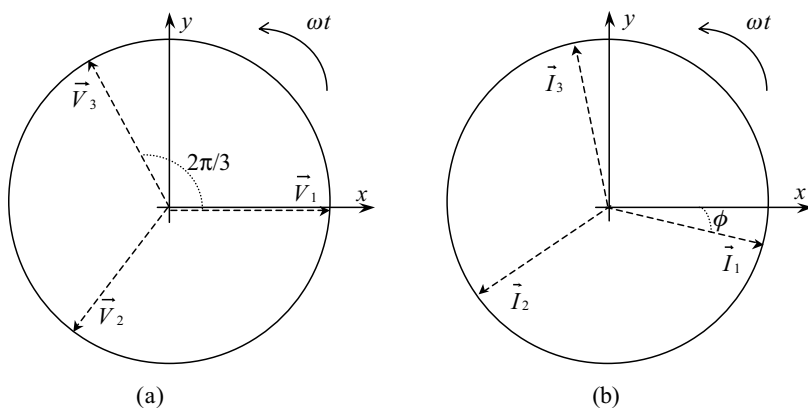


Figure 3.19 Représentation de Fresnel du système triphasé.

Nous pouvons constater que les vecteurs tension $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ d'une part et les vecteurs courant $\vec{I}_1, \vec{I}_2$ et $\vec{I}_3$ d'autre part, représentent une sorte d'étoile à $2\pi/3$. Ces vecteurs sont représentés à la figure 3.19 (a) et à la figure 3.19 (b).

3.4.2 Les deux modes de couplage

Les trois générateurs précédents ainsi que les trois récepteurs peuvent être associés de deux façons différentes : en couplage étoile ou en couplage triangle, notés aussi :

$\perp$ et Δ . Un générateur couplé en étoile (ou en triangle) peut donc alimenter une charge branchée en étoile (ou en triangle).

a) Couplage étoile

Nous pouvons utiliser pour les trois générateurs précédents un même conducteur en commun. Ce conducteur sert pour le retour du courant, ce qui porte le nombre total de conducteurs à quatre : trois conducteurs désignés souvent par « *trois phases* » parcourus respectivement par les courants $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ et $\vec{I}_3$ et un conducteur en commun pour le retour parcouru par la somme des courants $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$.

Dans le régime sinusoïdal équilibré, puisque les trois courants forment une étoile à $2\pi/3$, la somme des courants est nulle. Aucun courant ne passe dans le conducteur de retour, d'où le nom donné à celui-ci de *fil neutre*.

Théoriquement, ce fil peut être supprimé, mais en réalité l'équilibre parfait n'existe pas. Nous nous contentons d'utiliser une section de fil plus faible que pour les trois autres conducteurs qui sont les phases.

Dans la pratique, les phases et le neutre servent à alimenter un grand nombre de charges. Il est judicieux de répartir ces charges afin d'obtenir (de tendre vers) l'équilibre. La tension entre une phase quelconque et le neutre est de 220 V efficace soit une tension maximale (crête) de $220 \times \sqrt{2}$ V. Nous appelons cette tension, qui est représentée à la figure 3.20 (a), *une tension simple* par comparaison à la tension obtenue entre deux phases quelconques, représentée à la figure 3.20 (b) et désignée par *tension composée*.

$$\vec{U}_{12} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2; \quad \vec{U}_{23} = \vec{U}_2 - \vec{U}_3; \quad \vec{U}_{31} = \vec{U}_3 - \vec{U}_1$$

Nous pouvons vérifier que le module de la tension composée est égale à :

$$|\underline{U}|_{12} = |\underline{U}|_{23} = |\underline{U}|_{31} = (220 \times \sqrt{3}) \times \sqrt{2} \text{ V} = 380 \times \sqrt{2} \text{ V}$$

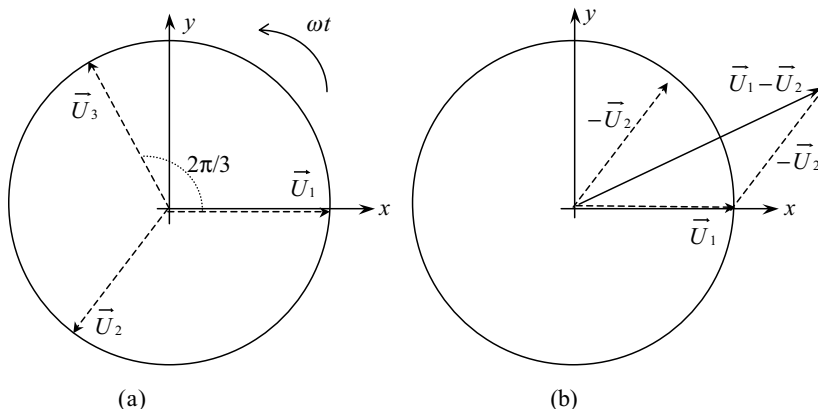


Figure 3.20 Représentation de Fresnel d'une tension simple (a) et d'une tension composée (b).

b) Couplage triangle

Nous pouvons utiliser pour les trois générateurs précédents un couplage triangle qui consiste à réunir une borne de sortie du générateur à la borne d'entrée du générateur suivant. Le même raisonnement peut s'appliquer aussi aux différentes charges. Ce branchement est présenté à la figure 3.21 (a) et la représentation vectorielle des tensions à la figure 3.21 (b).

Remarque : Un générateur en triangle peut alimenter des charges couplées en étoile et réciproquement, un générateur en étoile peut alimenter des charges montées en triangle.

Les trois conducteurs représentent les *trois lignes*. Ils sont parcourus respectivement par les courants dont les représentations complexes sont : $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ et $\underline{I}_3$ mais les courants qui circulent dans les *trois phases* sont identiques aux courants qui circulent dans les trois charges. Ils sont notés $\underline{I}_{11}$, $\underline{I}_{22}$ et $\underline{I}_{33}$.

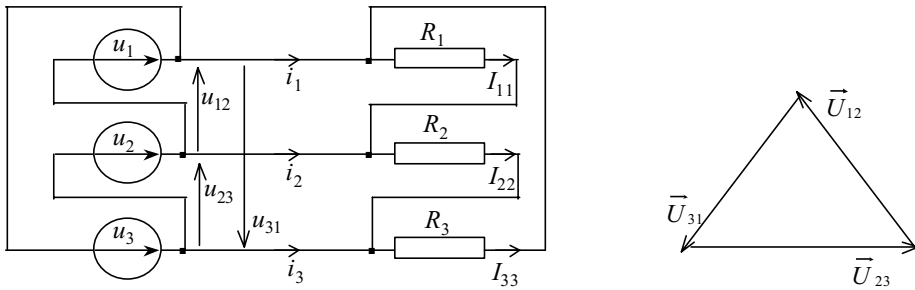


Figure 3.21 Représentation d'un couplage triangle-triangle (a) et représentation de Fresnel d'une tension composée (b).

Les modules des courants sont :

$$|\underline{I}_1| = \sqrt{3} |\underline{I}_{11}| ; \quad |\underline{I}_2| = \sqrt{3} |\underline{I}_{22}| ; \quad |\underline{I}_3| = \sqrt{3} |\underline{I}_{33}|$$

En plus, chaque courant de ligne est déphasé par rapport au courant de phase d'une quantité égale à $-\pi/6$. Par exemple $\underline{I}_1$ est déphasé de $-\pi/6$ par rapport à $\underline{I}_{11}$.

3.4.3 Puissance dans les circuits triphasés

La puissance instantanée produite par les trois générateurs et absorbée par les trois récepteurs est la somme des puissances instantanées des trois phases :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) + u_3(t) \cdot i_3(t) \\
 p(t) &= \left[\sqrt{3} UI \cos(\phi) \right] + \frac{UI}{\sqrt{3}} \left[\cos(2\omega t - \phi) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(2\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Or, les trois derniers termes de cette expression donnent une somme nulle. En effet dans le cas qui nous intéresse, les amplitudes sont égales et sont déphasés de $2\pi/3$. Il en résulte que la puissance active des trois phases est :

$$p(t) = P_{\text{active}} = P = \sqrt{3}UI \cos(\phi)$$

où $\cos(\phi)$ représente le facteur de puissance, $\sqrt{3}UI$ représente la puissance apparente, ϕ représente l'angle entre u_{12} et i_{11} . Nous pouvons aussi, comme pour un système monophasé, définir la puissance réactive :

$$P_{\text{réactive}} = P = \sqrt{3}UI \sin(\phi)$$



Remarques :

- La puissance réactive traduit l'existence d'un courant $I \sin(\phi)$ dans chaque phase qui est en quadrature avec la tension correspondante.
- Quel que soit le couplage, la puissance s'écrit toujours : $P = \sqrt{3}UI \cos(\phi)$.
- En triphasé, nous parlons souvent d'une tension, sans aucune précision. Il s'agit toujours d'une tension composée.

CE QU'IL FAUT RETENIR

► La représentation vectorielle (ou de Fresnel) d'un signal $s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$ est un vecteur $\vec{S}$, de module S_{Max} , tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω , et confondu avec l'axe Ox aux instants : $t = -\frac{\phi}{\omega} + 2K\frac{\pi}{\omega} = -\frac{\phi}{\omega} + 2KT$. La phase instantanée est l'angle que fait le vecteur à un instant t : $\omega t + \phi$.

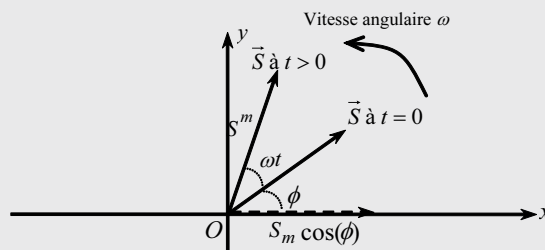


Figure 3.22 Représentation de Fresnel pour $\cos(\phi)$ positif.

► Le signal sinusoïdale $s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi)$ s'écrit sous la forme complexe : $S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}$. Le signal réel $s(t)$ est lié à ce nombre complexe et à l'amplitude complexe $\underline{S}$ par :

$$s(t) = \Re_{\text{réel}} (S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}) = \Re_{\text{réel}} (S_{\text{Max}} e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \Re_{\text{réel}} (\underline{S} \cdot e^{j\omega t})$$

$\underline{S}$ qui est indépendante du temps, présente l'amplitude complexe du signal $s(t)$ et permet de reconnaître celui-ci sans ambiguïté.

► L'impédance complexe $\underline{Z}$ représente le rapport de l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ sur l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{Max}} e^{j\phi}}{I_{\text{Max}} e^{j\psi}} = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} e^{j(\phi - \psi)} = Z e^{j\theta} \quad \text{avec : } Z = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} \quad \text{et} \quad \theta = \phi - \psi$$

Le module de $\underline{Z}$ est le quotient des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant, et l'argument est égal à la différence des phases à l'origine. L'inverse de l'impédance s'appelle l'*admittance* $\underline{Y}$.

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{et} \quad \underline{Y} = G + jB$$

► Pour une résistance R , l'impédance $Z = R$ et la tension $u(t)$ à ses bornes est de ce fait en phase avec le courant $i(t)$ qui parcourt la résistance.

► Pour une inductance L , l'impédance Z est : $Z = jL\omega = jX_L$. Le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont déphasés de $+\pi/2$, la tension $u(t)$ est en avance de phase par rapport au courant $i(t)$.

► Pour une capacitance C , l'impédance Z est : $Z = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega} = jX_C$. Le courant $i(t)$ est en avance de phase par rapport à la tension $u(t)$. Le déphasage est de $-\pi/2$.

► En régime sinusoïdal permanent, $u(t)$ et $i(t)$ se mettent sous la forme :

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \phi_2).$$

Nous trouvons l'expression de la puissance instantanée :

$$p(t) = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

► La puissance moyenne dissipée sur une période de la sinusoïde est :

$$P_{\text{active}} = P_{\text{moyenne}} = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \cos(\phi_2 - \phi_1) = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \cos(\Delta\phi)$$

► La puissance active et la puissance réactive sont :

$$p_{\text{active}}(t) = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} [1 + \cos(2\omega t)] \times \cos(\Delta\phi) ;$$

$$p_{\text{réactive}}(t) = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \sin(2\omega t) \times \sin(\Delta\phi)$$

► Lorsqu'une charge d'utilisation Z_U est branchée sur un générateur sinusoïdal, de force électromotrice e_g et d'impédance interne Z_g . La valeur de Z_U pour laquelle la puissance active fournie est maximale est $Z_u = Z_g^*$:

$$Z_g = R_g + jX_g \quad Z_U = R_U + jX_U = R_g - jX_g$$

Si cette condition est respectée, l'expression de la puissance devient :

$$P_{\text{active (Max)}} = \frac{E_g^2(\text{efficace})}{4 \times R_g}$$

► Une inductance réelle est représentée par l'association en série d'une résistance r_S avec une inductance pure L , soit par l'association en parallèle d'une résistance R_P

avec une inductance L . Le coefficient de qualité d'une bobine noté Q_L représente le rapport de l'énergie réactive sur l'énergie active au cours d'une période.

$$Q_L = 2\pi \frac{\text{Énergie réactive (électromagnétique) maximale emmagasinée sur une période}}{\text{Énergie active dissipée au cours une période}}$$

$$Q_L = 2\pi \frac{W_r(T)}{W_a(T)} = 2\pi \frac{L\omega \cdot I_{\text{Max}}^2}{2\omega} \frac{4\omega}{r_S \cdot I_{\text{Max}}^2 \cdot T} = \frac{L\omega}{r_S}$$

L'expression du coefficient de qualité montre que Q_L est définie à une pulsation ω bien déterminée. Ceci revient à dire que si ω varie, le coefficient de qualité Q_L varie aussi.

► Le condensateur réel est souvent représenté en ajoutant une résistance en parallèle sur le condensateur idéal. Le coefficient de qualité est :

$$Q_C = R_P C_P \omega$$

Le condensateur réel se rapproche d'autant plus du condensateur idéal que la quantité $R_P C_P \omega$ est élevée.

► Pour un même élément, à une fréquence donnée, il existe deux représentations équivalentes : l'une parallèle (indice P) et l'autre série (indice S).

<i>Bobine réelle</i>	<i>Condensateur réel</i>
$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{L_S \omega}{R_S} = \frac{R_P}{L_P \omega}$	$\tan(\delta) = \frac{1}{Q_C} = \frac{G}{B} = \frac{1}{R_P C_P \omega} = R_S C_S \omega$
$R_S = R_P \times \frac{1}{1 + Q_L^2}, \quad L_S = L_P \times \frac{Q_L^2}{1 + Q_L^2}$	$R_S = R_P \times \frac{\tan^2(\delta)}{1 + \tan^2(\delta)}, \quad C_S = C_P (1 + \tan^2(\delta))$
$R_P = R_S \times (1 + Q_L^2), \quad L_P = L_S \times \frac{1 + Q_L^2}{Q_L^2}$	$R_P = R_S \times \frac{(1 + \tan^2(\delta))}{\tan^2(\delta)}, \quad C_P = \frac{C_S}{1 + \tan^2(\delta)}$

EXERCICES

Exercice 3.1 Étude d'un circuit RLC quelconque

Soit le montage de la figure 3.23 qui fonctionne à une pulsation constante ω_0 :

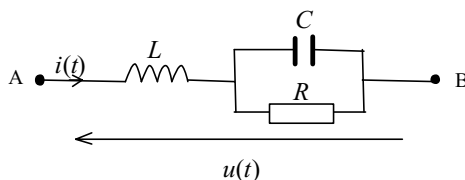


Figure 3.23 Circuit $R//C$ en série avec L .

1. Calculer en fonction de R , de C et de la pulsation ω_0 , la valeur L_0 que doit avoir l'inductance L pour que le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ soient en phase.
2. En déduire le coefficient de qualité du circuit qui se trouve entre A et B .

Solution

1. Le montage comporte un dipôle constitué d'une inductance en série avec un deuxième dipôle constitué par la mise en parallèle d'une résistance et d'un condensateur. Il serait intéressant de transformer ce deuxième dipôle en son équivalent série noté R_S et C_S .

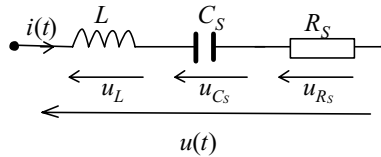


Figure 3.24 Circuit équivalent sous forme RLC série.

Nous pouvons calculer les valeurs de R_S et de C_S en utilisant les relations de passage données dans le tableau 3.4. Nous trouvons :

$$R_S = R \frac{\tan^2(\delta)}{1 + \tan^2(\delta)} \quad \text{et} \quad C_S = C (1 + \tan^2(\delta)) \quad \text{avec} :$$

$$\tan(\delta) = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{ce qui donne :} \quad \tan^2(\delta) = \frac{1}{(RC\omega_0)^2}$$

En remplaçant $\tan(\delta)$ par sa valeur, nous déterminons les expressions de R_S et C_S :

$$R_S = R \cdot \frac{1}{(RC\omega_0)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{(RC\omega_0)^2}}$$

$$R_S = R \frac{1}{(RC\omega_0)^2} \frac{(RC\omega_0)^2}{1 + (RC\omega_0)^2} = R \frac{1}{1 + (RC\omega_0)^2}$$

$$C_S = C \left(1 + \frac{1}{(RC\omega_0)^2} \right) = C \left(\frac{1 + (RC\omega_0)^2}{(RC\omega_0)^2} \right)$$

Le courant $i(t)$ sera en phase avec la tension $u(t)$ si l'impédance qui apparaît entre le point A et le point B est équivalente à une résistance pure. Or l'impédance Z est :

$$Z = R_S + jL\omega_0 + \frac{1}{jC_S\omega_0} = R_S + j \left(L\omega_0 - \frac{1}{C_S\omega_0} \right) = R_S$$

Cette relation impose :

$$L\omega_0 - \frac{1}{C_S\omega_0} = 0$$

Nous pouvons donc déduire la valeur de l'inductance L_0 qui satisfait la condition précédente :

$$L = L_0 = \frac{1}{C_S \omega_0^2} = \frac{1}{C \left(\frac{1 + (RC\omega_0)^2}{(RC\omega_0)^2} \right) \omega_0^2}$$

$$L_0 = \frac{(RC\omega_0)^2}{C (1 + (RC\omega_0)^2) \omega_0^2} = \frac{R^2 C}{(1 + (RC\omega_0)^2)}$$

2. L'inductance L_0 emmagasine à la pulsation ω_0 de l'énergie électromagnétique et le condensateur de l'énergie électrostatique. Le coefficient de qualité devient :

$$Q_L = \frac{L_0 \omega_0}{R_S} = \frac{\frac{1}{C_S \omega_0^2} \omega_0}{R_S} = \frac{1}{R_S C_S \omega_0} \quad \text{Or : } Q_C = \frac{1}{R_S C_S \omega_0} = Q_L$$

Le coefficient de qualité du circuit peut être donné en fonction de l'inductance ou de la capacité. ω_0 est la pulsation de résonance qui correspond à un minimum de la valeur de l'impédance Z du circuit :

$$Q = Q_L = Q_C = \frac{1}{R_S C_S \omega_0} = \frac{1 + (RC\omega_0)^2}{R} \frac{(RC\omega_0)^2}{C (1 + (RC\omega_0)^2) \omega_0} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$Q = \frac{(RC\omega_0)^2}{RC\omega_0} = RC\omega_0$$

Nous retrouvons le coefficient de qualité correspondant à un circuit RLC parallèle. Plus la résistance R est grande, plus le condensateur se rapproche d'un composant idéal, ce qui donne un coefficient de qualité qui tend vers l'infini.

Exercice 3.2 Adaptation en puissance d'une source réelle de tension

Soit le montage de la figure 3.25.

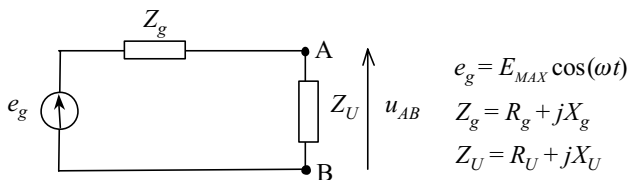


Figure 3.25 Générateur réel chargé par une impédance complexe.

1. Déterminer l'expression de la puissance active fournie par le générateur à la charge.
2. Donner la condition d'adaptation et calculer la puissance maximale fournie.
3. Nous supposons $X_U + X_g = 0$. Tracer la courbe de la variation de la puissance ainsi que la courbe de la variation du rendement η en fonction de R_U .

Solution

1. En notation complexe, le calcul de la puissance complexe fournie par le générateur a été présenté au paragraphe 3.3.3 (a). L'expression de cette puissance est :

$$\underline{P} = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2 \left[(R_U + R_g)^2 + (X_U + X_g)^2 \right]} (R_U + jX_U)$$

La puissance moyenne fournie à la charge est donnée par la partie réelle de la puissance complexe. On trouve :

$$P_{\text{active}} = \Re(\underline{P}) = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2 \left[(R_U + R_g)^2 + (X_U + X_g)^2 \right]} R_U$$

2. La valeur maximale obtenue de cette puissance correspond à : $X_U + X_g = 0$. Si cette condition est respectée, l'expression de la puissance devient :

$$P_{\text{active}} = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2 (R_U + R_g)^2} R_U$$

Cette puissance est maximale lorsque la dérivée de l'expression de P_{active} par rapport à la variable R_U est nulle :

$$\frac{dP_{\text{active}}}{dR_U} = \frac{\underline{E}_g^2}{2} \cdot \frac{(R_U + R_g)^2 - 2R_U (R_U + R_g)}{(R_U + R_g)^4} = 0 \text{ ce qui donne : } R_U = R_g$$

L'expression de la puissance active maximale est :

$$P_{\text{active (Max)}} = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2 (R_g + R_g)^2} R_g = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{8 \times R_g} = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2} \frac{1}{4R_g} = \frac{\underline{E}_{\text{eff}}^2}{4R_g}$$

La condition d'adaptation de la charge à la source impose $Z_u = Z_g^*$. Soit :

$$Z_U = R_U + jX_U = R_g - jX_g$$

3. Lorsque la condition $X_U + X_g = 0$ est satisfaite, l'expression de la puissance active devient :

$$P_{\text{active}} = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2 (R_U + R_g)^2} \cdot R_U = \frac{\underline{E}_{\text{Max}}^2}{2} \cdot \frac{R_U}{(R_U + R_g)^2} = K \cdot \frac{R_U}{(R_U + R_g)^2}$$

La dérivée de cette équation avec R_U comme variable donne :

$$\frac{d(P_{\text{active}})}{dR_U} = \frac{K \cdot (R_U + R_g)^2 - (K \cdot R_U) \cdot 2(R_U + R_g)}{(R_U + R_g)^4}$$

Cette dérivée s'annule pour $R_U = R_g$. Il s'agit d'un extremum qui correspond à un maximum. En effet, si $R_U = 0$ ou si $R_U = \infty$, la puissance active sera nulle d'après l'équation précédente. La variation de P_{active} en fonction de R_U est donnée à la figure 3.26 (a).

Le rendement en puissance est donné par le rapport de la puissance utilisée P_U sur la puissance totale. Or la puissance totale est donnée par la somme de la puissance utilisée et de la puissance P_g dissipée dans la résistance interne R_g . Si nous notons le courant qui passe dans le circuit I , le rendement devient :

$$\eta = \frac{P_U}{P_U + P_g} = \frac{R_U \cdot I^2}{(R_U \cdot I^2) + (R_g \cdot I^2)} = \frac{R_U}{R_U + R_g}$$

La courbe représentant la variation η en fonction de R_U est donnée à la figure 3.26 (b).

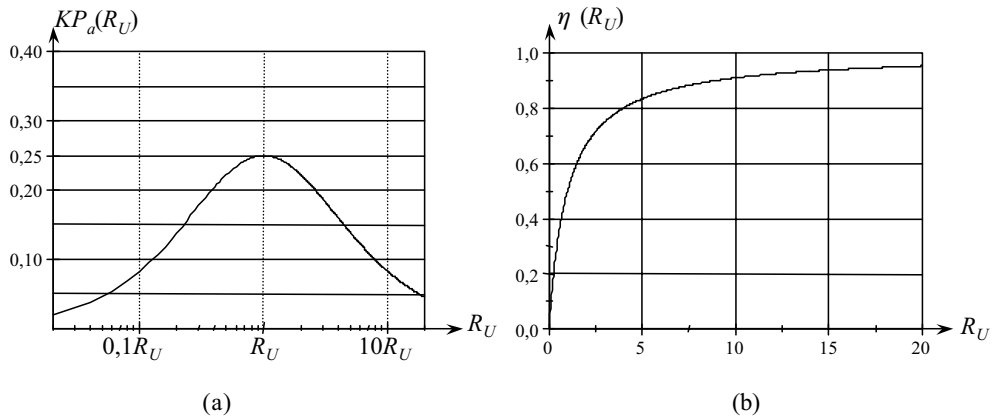


Figure 3.26 Variation de la puissance active (a) et du rendement (b) en fonction de R_U .

Exercice 3.3 Conditions d'équilibre du pont de Nerst et du pont de Sauty

Nous donnons les deux montages de la figure 3.27 qui sont appelés respectivement : pont de Nerst et pont de Sauty.

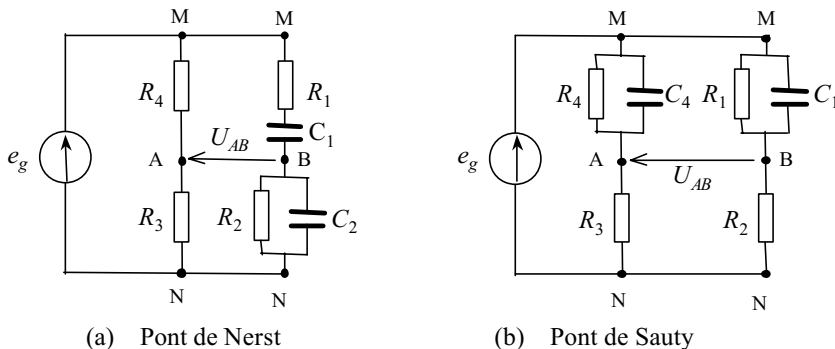


Figure 3.27 Schémas du pont de Nerst (a) et du pont de Sauty (b).

Nous notons Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 les impédances qui se trouvent respectivement dans les quatre branches : MB, BN, NA et AM. Nous plaçons souvent entre les points A et B un détecteur sensible (un galvanomètre par exemple).

Nous cherchons souvent à obtenir l'équilibre du pont, c'est à dire avoir un courant nul qui circule entre A et B. Cette condition est obtenue si le potentiel du point A et le potentiel du point B sont identiques.

1. Nous supposons des impédances complexes quelconques. Déterminer la condition de l'équilibre du pont qui s'applique pour les deux cas de la figure 3.27.

2. Nous prenons maintenant le cas particulier du pont de Nerst et nous supposons que les impédances sont fixées. Montrer que la condition d'équilibre n'est respectée que pour une fréquence particulière notée f_0 .

3. Nous prenons maintenant le pont de Sauty et nous supposons que la branche MB est constituée par un condensateur réel dont le modèle est composé d'une résistance R_1 en parallèle avec un condensateur C_1 .

Montrer que la condition d'équilibre permet d'identifier R_1 et C_1 .

Solution

1. La condition d'équilibre impose que la différence de potentiel entre A et B soit nulle, ce qui revient à dire que le courant qui passe dans la branche MA et celui qui passe dans la branche AN sont identiques. Le même raisonnement s'applique pour les branches MB et BN. Dans ce cas on peut appliquer le théorème du diviseur de tensions.

Si nous désignons par $\underline{U}_{AN}$, $\underline{U}_{BN}$ et $\underline{E}_g$ les tensions en notation complexe, nous trouvons :

$$\underline{U}_{AN} = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \underline{E}_g \quad \text{et} \quad \underline{U}_{BN} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{E}_g$$

Or, la différence de potentiel $\underline{U}_{AB}$ est obtenu à partir des équations précédentes :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AN} + \underline{U}_{NB} = \underline{U}_{AN} - \underline{U}_{BN} = \left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \underline{E}_g \\ \underline{U}_{AB} &= \left(\frac{Z_3 (Z_1 + Z_2)}{(Z_3 + Z_4) (Z_1 + Z_2)} - \frac{Z_2 (Z_3 + Z_4)}{(Z_1 + Z_2) (Z_3 + Z_4)} \right) \underline{E}_g \end{aligned}$$

En développant l'expression précédente, nous déduisons :

$$\underline{U}_{AB} = \left(\frac{Z_3 (Z_1 + Z_2) - Z_2 (Z_3 + Z_4)}{(Z_3 + Z_4) (Z_1 + Z_2)} \right) \underline{E}_g = \left(\frac{(Z_3 \cdot Z_1) - (Z_2 \cdot Z_4)}{(Z_3 + Z_4) (Z_1 + Z_2)} \right) \underline{E}_g$$

La condition d'équilibre impose une différence de potentiel nulle, ce qui donne :

$$\underline{U}_{AB} = 0 = \left(\frac{(Z_3 \cdot Z_1) - (Z_2 \cdot Z_4)}{(Z_3 + Z_4) \cdot (Z_1 + Z_2)} \right) \underline{E}_g \quad \text{soit :} \quad Z_3 \cdot Z_1 = Z_2 \cdot Z_4$$

2. Si nous prenons le pont de Nerst, nous identifions les impédances :

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}, & Z_3 &= R_3 \\ Z_2 &= \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}, & Z_4 &= R_4 \end{aligned}$$

La condition d'équilibre devient :

$$R_3 \left(\frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} \right) = R_4 \left(\frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega} \right)$$

L'expression précédente s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{R_3} &= \left(\frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} \right) \left(\frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2} \right) = \frac{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}{jR_2C_1\omega} \\ \frac{R_4}{R_3} &= \frac{j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega}{jR_2C_1\omega} + j \frac{(R_1R_2C_1C_2\omega^2) - 1}{R_2C_1\omega} \end{aligned}$$

Si nous exprimons l'égalité des deux parties réelles des deux expressions, nous trouvons :

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_2C_1} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad \text{et} \quad (R_1R_2C_1C_2\omega^2) - 1$$

Ainsi, si tous les éléments des impédances sont fixés et s'ils vérifient la relation suivante :

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_2C_1} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$$

l'équilibre du pont ne sera obtenu que pour une valeur particulière ω_0 de la pulsation :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad \text{soit une fréquence :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

3. Si nous prenons le pont de Sauty, nous identifions les impédances et les admittances :

$$Z_3 = R_3 ; \quad Z_2 = R_2 ; \quad Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega ; \quad Y_4 = \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_4} + jC_4\omega$$

La condition d'équilibre qui est $Z_3Z_1 = Z_2Z_4$ devient :

$$Z_3.Y_4 = Z_2.Y_1 \quad \text{qui s'écrit aussi sous la forme suivante :}$$

$$R_3 \left(\frac{1}{R_4} + jC_4\omega \right) = R_2 \left(\frac{1}{R_1} + jC_1\omega \right)$$

Si nous développons cette expression, nous obtenons :

$$\frac{R_3}{R_4} + jR_3C_4\omega = \frac{R_2}{R_1} + jR_2C_1\omega$$

soit :

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad R_3C_4 = R_2C_1$$

Ainsi, si tous les éléments des impédances sont fixés et si le pont est équilibré, nous pouvons déterminer les valeurs du modèle en parallèle du condensateur :

$$R_1 = \frac{R_2}{R_3} R_4 \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{R_3}{R_2} C_4$$

Exercice 3.4 Application des théorèmes de superposition et de Millman en régime harmonique

Soit le montage de la figure 3.28.

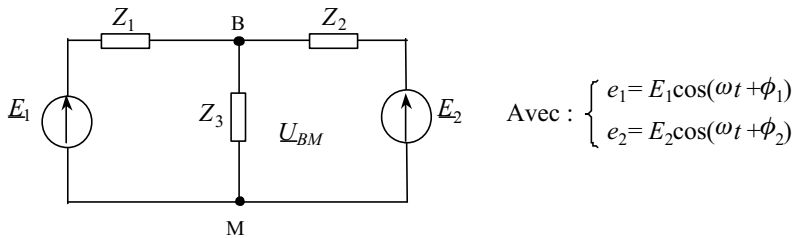


Figure 3.28 Schémas du montage en T avec deux sources de tensions.

1. Déterminer, en utilisant le théorème de superposition, la différence de potentiel complexe qui existe entre les deux points B et M.
2. Retrouver le même résultat en utilisant le théorème de Millman.
3. Calculer la tension sinusoïdale $u_{BM}(t)$ en précisant l'amplitude et la phase. Pour cela nous choisissons ϕ_1 comme origine des phases :

$$\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/2, Z_1 = Z_2 = R, E_1 = E_2 = E.$$

Z_3 est l'impédance d'un condensateur de capacité $C_3 = C$ et $RC\omega = 1$.

Solution

1. Nous appliquons le théorème de superposition en commençant comme indiqué à la figure 3.29 (a) par passer la deuxième source en la remplaçant par un court-circuit. L'impédance Z_2 et l'impédance Z_3 se trouvent alors en parallèle. Nous constatons que la différence de potentiel entre B et M due à la première source prise seule s'obtient en appliquant le théorème de diviseur de tension :

$$\underline{U}_{BM(1)} = \frac{Z_3 // Z_2}{Z_1 + (Z_3 // Z_2)} \underline{E}_1 = \frac{\frac{Z_3 Z_2}{Z_3 + Z_2}}{Z_1 + \left(\frac{Z_3 Z_2}{Z_3 + Z_2} \right)} \underline{E}_1 = \frac{Z_3 Z_2}{Z_1 (Z_3 + Z_2) + Z_3 Z_2} \underline{E}_1$$

De la même façon, en ne considérant que la deuxième source seule, en passivant la première source de tension, nous obtenons :

$$\underline{U}_{BM(2)} = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_3 Z_2} \underline{E}_2$$

Il suffit maintenant d'additionner les deux contributions précédentes pour obtenir la différence de potentiel finale :

$$\underline{U}_{BM} = \underline{U}_{BM(1)} + \underline{U}_{BM(2)} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_3 Z_2} (Z_2 \underline{E}_1 + Z_1 \underline{E}_2)$$

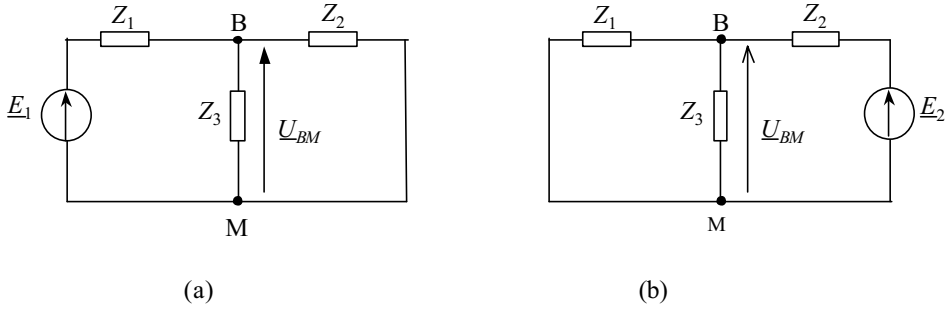


Figure 3.29 Passivation de E_2 (a) et de E_1 (b).

2. Nous appliquons le théorème de Millman qui s'énonce comme suit : Si nous prenons comme référence de potentiel le point M, au nœud B, nous obtenons :

$$\underline{U}_{BM} = \frac{\sum_{i=1}^3 \underline{E}_i Y_i}{\sum_{i=1}^3 Y_i} = \frac{(\underline{E}_1 Y_1) + (\underline{E}_2 Y_2) + (0 Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{Z_1} + \frac{\underline{E}_2}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

$$\underline{U}_{BM} = \frac{(\underline{E}_1 Z_2 Z_3) + (\underline{E}_2 Z_1 Z_3)}{(Z_1 Z_2) + (Z_1 Z_3) + (Z_2 Z_3)}$$

Nous retrouvons le même résultat avec un calcul, qui est plus simple que celui utilisé avec la première méthode et sans être obligé, de passer par des transformations du montage.

3. Nous pouvons écrire que les tensions en notation complexe sont :

$$\underline{E}_1 = E_1 \cdot e^{j\phi_1} \quad \text{et} \quad \underline{E}_2 = E_2 \cdot e^{j\phi_2}$$

L'impédance du condensateur est :

$$Z_3 = \frac{1}{jC\omega} = -j \frac{1}{C\omega} = jX_C$$

Sachant que l'argument d'une résistance est nul, les impédances en notation complexe s'écrivent alors :

$$Z_1 = R ; \quad Z_2 = R ; \quad Z_3 = |Z_3| e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

avec :

$$|Z_3| = |X_C| = \frac{1}{C\omega}$$

Si nous passons en notation normale en fonction du temps, nous trouvons :

$$u_{BM}(t) = Z_3 \frac{(E \cos(\omega t) Z_2) + (E \cos(\omega t + \pi/2) Z_1)}{(Z_1 Z_2) + (Z_1 Z_3) + (Z_2 Z_3)}$$

$$u_{BM}(t) = \frac{1}{jC\omega} \frac{(E \cos(\omega t) R) + (E \cos(\omega t + \pi/2) R)}{R^2 + \frac{2R}{jC\omega}}$$

$$u_{BM}(t) = \frac{E}{jRC\omega + 2} (\cos(\omega t + 0) + \cos(\omega t + \pi/2))$$

Nous savons que le déphasage de $\pi/2$ du terme cosinus, revient à multiplier par j ce même terme. Autrement dit, $u_{BM}(t)$ s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$u_{BM}(t) = \frac{E}{jRC\omega + 2} (\cos(\omega t) + j \cos(\omega t)) = \frac{E(2 - jRC\omega)}{-(jRC\omega)^2 + 2^2} (\cos(\omega t) + j \cos(\omega t))$$

Puisque $RC\omega = 1$, nous trouvons :

$$u_{BM}(t) = \frac{E(2 - j)}{5} (\cos(\omega t) + j \cos(\omega t)) = \frac{E \cos(\omega t)}{5} ((2 - j) \times (1 + j))$$

$$u_{BM}(t) = \frac{E \cos(\omega t)}{5} (3 + j) = \frac{3E}{5} \cos(\omega t) + \frac{E}{5} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

l'expression précédente nous permet de tracer le diagramme de Fresnel à l'instant $t = 0$. Le vecteur résultant est le vecteur qui présente les coordonnées suivantes :

$$U \cos(\phi) = \frac{3E}{5} \cos(0) + \frac{E}{5} \cos(\pi/2) = \frac{3E}{5}$$

$$U \sin(\phi) = \frac{3E}{5} \sin(0) + \frac{E}{5} \sin(\pi/2) = \frac{E}{5}$$

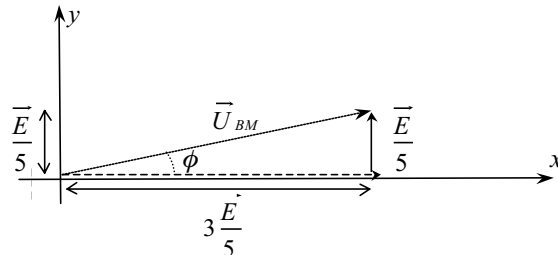


Figure 3.30 Diagramme de Fresnel de U_{BM} .

Nous pouvons déterminer l'expression de la tension $u_{BM}(t)$: l'amplitude est donnée par le théorème de Pythagore et l'angle par sa tangente.

$$|U_{BM}|^2 = \left| \frac{3E}{5} \right|^2 + \left| \frac{E}{5} \right|^2 \quad \text{soit : } |U_{BM}| = \sqrt{\frac{10}{25}} \times E \approx 0,63 \times E$$

$$\tan(\varphi) = \frac{E/5}{3E/5} = \frac{1}{3} \quad \text{soit : } \varphi \approx 18,4^\circ \quad \text{ou} \quad 0,32 \text{ rad}$$

Nous déduisons donc l'expression finale de $u_{BM}(t)$:

$$u_{BM}(t) = 0,63 \times E \cos(\omega t + 0,32 \text{ rad})$$

Exercice 3.5 Étude du circuit dit « pont de Wienn »

Soit le montage de la figure 3.31 qui représente un pont de Wienn.

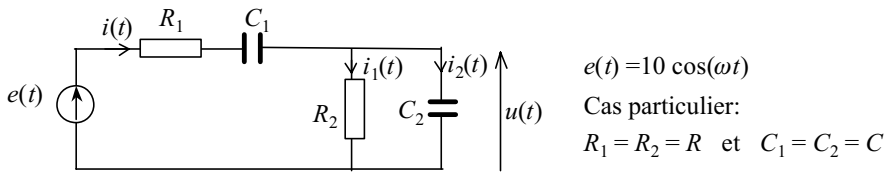


Figure 3.31 Montage à pont de Wienn.

1. Tracer les vecteurs de Fresnel et en déduire la tension de sortie $u(t)$ dans le cas particulier où $u(t)$ et $e(t)$ se trouvent en phase.

2. Trouver la condition sur la fréquence qui permet d'avoir $u(t)$ et $e(t)$ en phase. Pour cela, nous supposons le cas particulier où les deux résistances d'une part et les deux condensateurs d'autre part sont identiques.

Solution

1. À la tension $e(t)$ correspond un vecteur de Fresnel noté $\vec{E}$ d'amplitude 10 volts et de déphasage nul. Ce vecteur est donc confondu avec l'axe des x . Nous avons supposé aussi que la tension de sortie $\vec{U}$ est en phase avec la tension d'entrée. On sait aussi que les courants $\vec{I}_1$ et $\vec{U}$ sont en phase puisque $u(t) = R_2 i_1(t)$. D'autre part, $\vec{I}_2$ est en avance de $\pi/2$ par rapport à $\vec{U}$ donc par rapport à $\vec{I}_1$.

La tension aux bornes du condensateur C_1 qui est notée $\vec{U}_{C1}$ est en retard de $\pi/2$ par rapport au courant qui circule dans ce même condensateur $\vec{I}$. Le même raisonnement montre que la tension aux bornes de R notée $\vec{U}_{R1}$ est en phase avec $\vec{I}$.

Nous traçons le diagramme de Fresnel dans le cas particulier : $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C$.

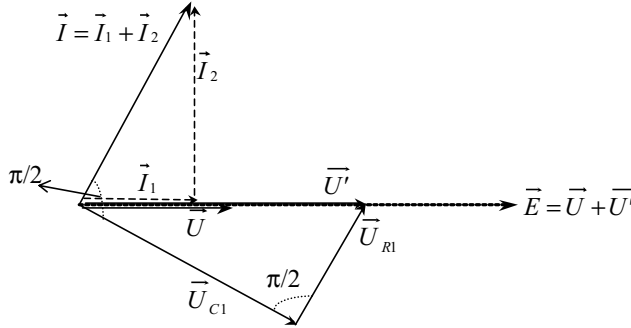


Figure 3.32 Diagramme de Fresnel des courants et des tension.

2. La condition pour avoir $\vec{U}$ et $\vec{E}$ en phase impose que $\vec{U}'$ soit lui aussi en phase avec $\vec{U}$ et que la somme des modules vérifie : $|U| + |U'| = |E|$. Nous appliquons dans ce cas le théorème de Pythagore :

$$|U_{C1}|^2 + |U_{R1}|^2 = |U'|^2 \quad \text{soit :} \quad \left(\frac{I}{C\omega}\right)^2 + (R.I)^2 = \left(\frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{C^2 \omega^2}\right) . I^2 = |U'|^2$$

Or, si nous remplaçons I^2 par sa valeur, nous trouvons :

$$\left(\frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{C^2 \omega^2}\right) (I_1^2 + I_2^2) = |U'|^2 \quad \text{Or, } |I_1| = \frac{|U_1|}{R} \quad \text{et} \quad |I_2| = \frac{|U_1|}{Z_C} = |U_1| C\omega$$

$$|U'| + |U| = |E| \quad \text{donne :} \quad \sqrt{\left(\frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{C^2 \omega^2}\right)} \sqrt{\left(\frac{U^2}{R^2} + U^2 . C^2 \omega^2\right)} + |U| = |E|$$

$$|U| \times \sqrt{\left(\frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{C^2 \omega^2}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2\right)} + |U| = |E|$$

$$|U| \times \left[1 + \sqrt{\left(\frac{(1 + R^2 C^2 \omega^2)^2}{R^2 C^2 \omega^2}\right)}\right] = |U| \times \left[1 + \left(\frac{1}{RC\omega} + RC\omega\right)\right]$$

Or, pour un déphasage nul, nous avons : $RC\omega = 1$. Nous pouvons donc déduire l'amplitude de la tension de sortie qui vaut le tiers de l'amplitude de la tension d'entrée, soit 3 volts. C'est la condition d'équilibre du pont.

Exercice 3.6 Étude d'un circuit triphasé équilibré

Soit le circuit triphasé équilibré de la figure 3.33.

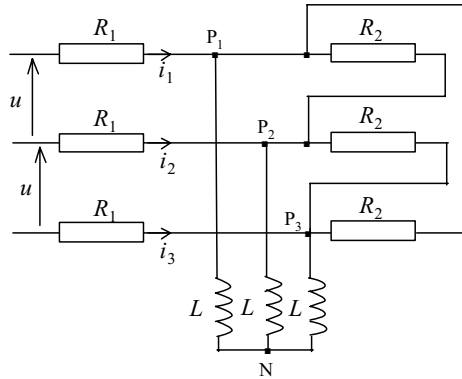


Figure 3.33 Circuit triphasé équilibré.

Calculer les courants qui passent dans les phases en indiquant leurs modules et leurs phases. Cas particulier : $R_1 = R_2 = R$.

Solution

Pour déterminer l'expression du courant qui passe dans une phase, nous commençons par transformer le schéma triangle en schéma étoile.

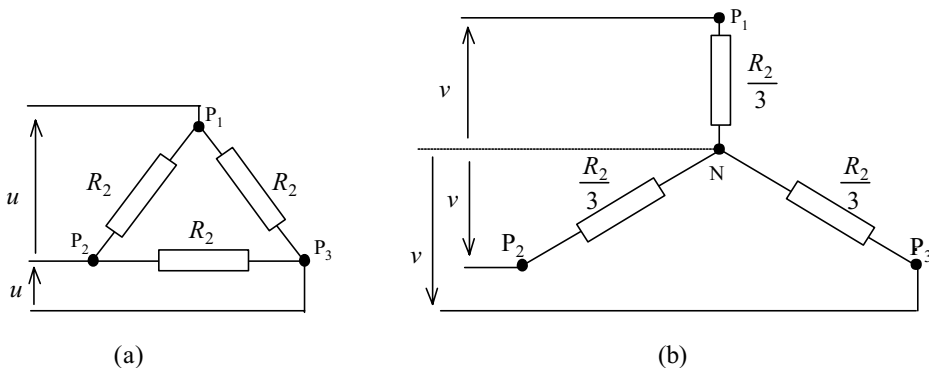


Figure 3.34 Transformation triangle (a) en étoile (b).

D'après le théorème de Kennelly, l'impédance $Z_{\text{étoile}}$ est égale au tiers de l'impédance Z_{triangle} .

$$Z_{\text{étoile}} = Z_{P_1-N} = Z_{P_2-N} = Z_{P_3-N} = \frac{Z_{\text{triangle}}}{3} = \frac{R_2}{3}$$

Nous relierons ensuite les deux conducteurs qui sont les neutres notés « N » entre eux. Nous nous retrouvons alors dans le cas simple d'un circuit monophasé représenté à la figure 3.35.

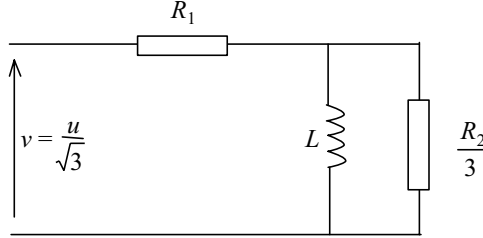


Figure 3.35 Circuit équivalent en monophasé.

Nous pouvons donc calculer le courant de la ligne. Nous déterminons ensuite le courant de phase en utilisant les relations de passage concernant le module et la phase.

$$I_{\text{étoile}} = \frac{I_{\text{triangle}}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \phi = -\frac{\pi}{6}$$

Nous pouvons calculer l'impédance Z du circuit équivalent :

$$Z = R_1 + \left(\frac{\frac{R_2}{3} jL\omega}{\frac{R_2}{3} + jL\omega} \right) = R_1 + \left(\frac{R_2 jL\omega}{R_2 + j3L\omega} \right) = \frac{R_1 R_2 + jL\omega (3R_1 + R_2)}{R_2 + j3L\omega}$$

Nous prenons le cas particulier :

$$R_1 = R_2 = R.$$

$$Z = \frac{R^3 - j3L\omega R^2 + jL\omega 4R^2 + 12L^2\omega^2 R}{(R^2 + 9L^2\omega^2)}$$

$$Z = \left[\frac{R^3 + 12L^2\omega^2 R}{(R^2 + 9L^2\omega^2)} \right] + j \left[\frac{L\omega R^2}{(R^2 + 9L^2\omega^2)} \right]$$

Le module de Z donne :

$$|Z| = \sqrt{\left[\frac{R^3 + 12L^2\omega^2 R}{(R^2 + 9L^2\omega^2)} \right]^2 + \left[\frac{L\omega R^2}{(R^2 + 9L^2\omega^2)} \right]^2}$$

$$|Z| = R \times \frac{\sqrt{(R^4 + 25L^2\omega^2 R^2 + 144L^4\omega^4)}}{(R^2 + 9L^2\omega^2)}$$

La phase est donnée par l'argument :

$$\tan(\phi) = \frac{L\omega R^2}{R^3 + 12L^2\omega^2 R} = \frac{L\omega R}{R^3 + 12L^2\omega^2 R}$$

Exercice 3.7 Modélisation série et parallèle d'une inductance réelle

En régime sinusoïdal, à une fréquence f_0 , une inductance réelle peut être modélisée soit par une résistance R_S en série avec une inductance idéale L_S (figure 3.36 a), soit par une résistance R_P en parallèle avec une inductance idéale L_P (figure 3.36 b).

1. Déterminer les expressions de R_S et de L_S en fonction de R_P , L_P et ω_0 . En déduire le coefficient de qualité Q_S en fonction de R_S , L_S et ω_0 .
2. Déterminer les expressions de R_P et de L_P en fonction de R_S , L_S et ω_0 . En déduire le coefficient de qualité Q_P en fonction de R_P , L_P et ω_0 .

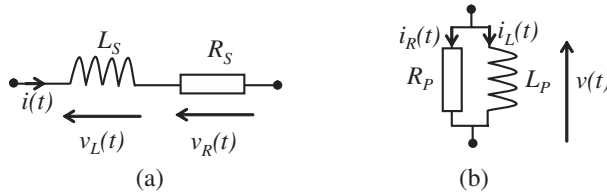


Figure 3.36 Modèle série d'une inductance (a) et son modèle parallèle (b).

Solution

1. Expressions de R_S , L_S et Q_S

Dans le cas de la représentation série de la figure 3.36 (a), l'impédance Z_S s'écrit :

$$Z_S = R_S + jL_S\omega_0$$

Dans le cas de la représentation parallèle de la figure 3.36 (b), l'admittance Y_P s'écrit :

$$Y_P = \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{R_P} + \frac{1}{jL_P\omega_0}$$

$$Y_P = \frac{L_P\omega_0}{R_PL_P\omega_0} - j\frac{R_P}{R_PL_P\omega_0}$$

On déduit l'expression de Z_P :

$$Z_P = \frac{R_PL_P\omega_0}{L_P\omega_0 - jR_P} = \frac{R_P(L_P\omega_0)^2 + jR_P^2L_P\omega_0}{(L_P\omega_0)^2 + R_P^2}$$

L'égalité des deux impédances $Z_S = Z_P$ donne :

$$R_S = \frac{R_P(L_P\omega_0)^2}{(L_P\omega_0)^2 + R_P^2} \quad \text{et} \quad L_S = \frac{R_P^2L_P}{(L_P\omega_0)^2 + R_P^2}$$

La définition du coefficient de qualité est :

$$Q_S = 4\pi \times \frac{\text{Energie moyenne emmagasinée sur une période}}{\text{Energie moyenne dissipée sur une période}}$$

La puissance instantanée dissipée dans L_S est :

$$p_L(t) = v_L(t) \times i(t) = L_S \times i(t) \times \frac{di(t)}{dt}$$

Soit : $dw_L(t) = L_S \times i(t) \times di(t)$ ce qui donne :

$$W_L(t) = \int_0^t L_S \times i(t) \times di(t) = \frac{1}{2} L_S i^2(t)$$

Pour un courant sinusoïdal : $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$, l'énergie moyenne emmagasinée dans l'inductance L_S est :

$$\overline{W_L}(t) = \frac{1}{2} \times \int_0^T L_S i^2(t) di(t) = \frac{1}{2} \times \int_0^T L_S I^2 \sin^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{4} L_S I^2 = \frac{1}{4} \times \frac{V_L^2}{L_S^2 \omega_0^2}$$

Dans le cas d'une représentation série, l'impédance Z_S s'écrit : $Z_S = R_S + jL_S \omega_0$.

L'énergie dissipée dans la résistance R_S pendant une période est :

$$\overline{W_R} = \frac{1}{2} \times R_S \times I^2 \times T = \frac{1}{2} \times R_S \times I^2 \times \frac{2\pi}{\omega_0}$$

On en déduit le coefficient de qualité Q_S :

$$Q_S = 4\pi \times \frac{\frac{1}{4} \times L_S \times I^2}{\frac{1}{2} \times R_S \times I^2 \times \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{L_S \omega_0}{R_S}$$

2. Expressions de R_P , L_P et Q_P

Les expressions trouvées dans la première question nous permettent de déterminer l'expression de Y_S :

$$Y_S = \frac{1}{Z_S} = \frac{1}{R_S + jL_S \omega_0} = \frac{R_S - jL_S \omega_0}{(R_S + jL_S \omega_0) \times (R_S - jL_S \omega_0)}$$

$$Y_S = \frac{R_S}{(R_S)^2 + (L_S \omega_0)^2} - j \frac{L_S \omega_0}{(R_S)^2 + (L_S \omega_0)^2}$$

L'égalité des deux admittances $Y_S = Y_P$ donne :

$$R_P = \frac{(L_S \omega_0)^2 + R_S^2}{R_S} \quad \text{et} \quad L_P = \frac{(L_S \omega_0)^2 + R_S^2}{L_S \omega_0}$$

Pour une tension sinusoïdale : $v(t) = V_L \sin(\omega_0 t)$, l'énergie moyenne emmagasinée dans l'inductance L_P est :

$$\overline{W_L}(t) = \frac{1}{4} \times \frac{V_L^2}{L_P^2 \omega_0^2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance R_P pendant une période est :

$$\overline{W_R} = \frac{1}{2} \times \frac{V^2}{R_P} \times T = \frac{1}{2} \times \frac{V^2}{R_P} \times \frac{2\pi}{\omega_0}$$

On en déduit le coefficient de qualité Q_P :

$$Q_P = 4\pi \times \frac{\frac{1}{4} \times \frac{V^2}{L_P \omega_0^2}}{\frac{V^2}{2R_P} \times \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{R_P}{L_P \omega_0}$$

Exercice 3.8 Calcul d'un composant équivalent à un circuit complexe

On souhaite calculer la valeur du composant équivalent vu entre le point A et le point B de la figure 3.37. Les numéros indiqués sur la figure sont les coefficients multiplicatifs.

1. Le montage est composé uniquement de résistances. Le numéro 1 correspond à une résistance R , le numéro 2 correspond à une résistance $2R$ et le numéro 5 correspond à une résistance $5R$.

Calculer la résistance équivalente entre le point A et le point B.

2. Le montage est composé uniquement de bobines d'inductances L , $2L$ et $5L$.

Calculer la valeur de l'inductance équivalente entre le point A et le point B.

3. Le montage est composé uniquement de condensateurs de capacités C , $2C$ et $5C$.

Calculer la valeur de la capacité du condensateur équivalent entre le point A et le point B.

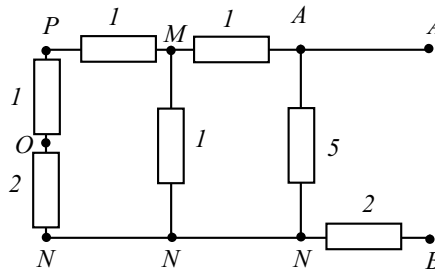


Figure 3.37 Montage permettant le calcul du composant équivalent entre A et B.

Solution

1. Calcul de la résistance équivalente R_{eq}

On remarque que les trois branches MP, PO et ON, sont en série. La résistance équivalente de ses trois branches est la somme des trois résistances :

$$R_{\text{eq}1} = R_{MP} + R_{PO} + R_{ON} = R + R + 2R = 4R$$

Entre le point M et le point N, on trouve donc cette résistance R_{eq1} en parallèle avec la résistance de valeur R :

$$R_{MN} = R_{\text{eq1}} // R = \frac{R_{\text{eq1}} R}{R_{\text{eq1}} + R} = \frac{4R^2}{4R + R} = \frac{4}{5}R = 0,8R$$

Cette résistance R_{MN} se trouve en série avec la résistance de valeur R ce qui donne :

$$R_{\text{eq2}} = R_{MN} + R = 0,8R + R = 1,8R$$

Entre le point A et le point N, on trouve donc cette résistance R_{eq2} en parallèle avec la résistance de valeur $5R$:

$$R_{AN} = R_{\text{eq2}} // 5R = \frac{1,8R \times 5R}{1,8R + 5R} = \frac{9R^2}{6,8R} = \frac{9}{6,8}R = 1,323R$$

Cette résistance R_{AN} se trouve en série avec la résistance de valeur $2R$ ce qui donne :

$$R_{AB} = R_{\text{eq3}} = R_{AN} + 2R = 1,323R + 2R = 3,323R$$

2. Calcul de la valeur de l'inductance équivalente L_{eq}

Puisque les trois branches MP, PO et ON, sont en série. L'impédance équivalente de ses trois branches est la somme des trois impédances :

$$Z_{\text{eq1}} = Z_{MP} + Z_{PQ} + Z_{QN} = jL\omega + jL\omega + 2jL\omega = 4jL\omega = j(4L)\omega = jL_{\text{eq1}}\omega$$

Entre le point M et le point N, on trouve donc cette inductance équivalente L_{eq1} en parallèle avec l'inductance de valeur L , l'impédance entre M et N devient :

$$Z_{MN} = Z_{\text{eq1}} // (jL\omega) = \frac{Z_{\text{eq1}} (jL\omega)}{Z_{\text{eq1}} + (jL\omega)} = \frac{j^2 (LL_{\text{eq1}}) \omega^2}{j (L + L_{\text{eq1}}) \omega} = j \left(\frac{LL_{\text{eq1}}}{L + L_{\text{eq1}}} \right) \omega$$

L'inductance équivalente est donc :

$$L_{MN} = \frac{L \times L_{\text{eq1}}}{L + L_{\text{eq1}}} = \frac{4L^2}{5L} = 0,8L$$

Cette inductance L_{MN} se trouve en série avec l'inductance de valeur L ce qui donne :

$$L_{\text{eq2}} = L_{MN} + L = 0,8L + L = 1,8L$$

Entre le point A et le point N, on trouve donc cette inductance L_{eq2} en parallèle avec l'inductance de valeur $5L$:

$$L_{AN} = L_{\text{eq2}} // 5L = \frac{1,8L \times 5L}{1,8L + 5L} = \frac{9L^2}{6,8L} = \frac{9}{6,8}L = 1,323L$$

Cette inductance L_{AN} se trouve en série avec l'inductance de valeur $2L$ ce qui donne :

$$L_{AB} = L_{\text{eq3}} = L_{AN} + 2L = 1,323L + 2L = 3,323L$$

3. Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

L'impédance équivalente des trois branches MP, PO et ON est la somme des trois impédances :

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq1}} &= Z_{MP} + Z_{PQ} + Z_{QN} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{j2C\omega} = \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{jC\omega} \\ &= 2,5 \times \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j(0,4C)\omega} \end{aligned}$$

La capacité équivalente C_{eq1} vaut donc : $C_{\text{eq1}} = 0,4C$.

Entre le point M et le point N, on trouve donc l'impédance Z_{eq1} en parallèle avec l'impédance de valeur $Z = 1/jC\omega$:

$$Z_{MN} = Z_{\text{eq1}} // Z = \frac{Z_{\text{eq1}}Z}{Z_{\text{eq1}} + Z} = \frac{2,5 \times \frac{1}{jC\omega} \times \frac{1}{jC\omega}}{2,5 \times \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{2,5}{3,5}Z = 0,714 \times Z = \frac{0,714}{jC\omega}$$

Cette impédance Z_{MN} se trouve en série avec l'impédance de valeur $Z = 1/jC\omega$ ce qui donne :

$$Z_{\text{eq2}} = Z_{MN} + Z = 0,714 \times Z + Z = 1,714 \times Z = \frac{1,714}{jC\omega}$$

Entre le point A et le point N, on trouve donc cette impédance Z_{eq2} en parallèle avec l'impédance de valeur $Z_5 = 1/j(5C)\omega$:

$$Z_{AN} = Z_{\text{eq2}} // Z_5 = \frac{\frac{1,714}{jC\omega} \times \frac{1}{j(5C)\omega}}{\frac{1,714}{jC\omega} + \frac{1}{j(5C)\omega}} = \frac{0,179}{jC\omega} = \frac{1}{j\left(\frac{C}{0,179}\right)\omega} = \frac{1}{j(5,58C)\omega}$$

Ce qui donne :

$$Z_{AB} = Z_{AN} + Z_{NB} = \frac{1}{j(5,58C)\omega} + \frac{1}{j(2C)\omega} = \frac{7,58}{j(11,16C)\omega} = \frac{1}{j(1,47C)\omega}$$

La valeur de la capacité équivalente est : $C_{AB} = 1,47 \times C$



Remarque : nous pouvons bien sûr calculer directement les valeurs des composants en appliquant les résultats des associations des composants en série et en parallèle.

Chapitre 4

Quadripôles électriques et fonctions de transfert

4.1 DÉFINITIONS

4.1.1 Quadripôle électrique

Un quadripôle est par définition un réseau qui comporte quatre bornes de liaisons avec les circuits extérieurs. Il s'agit souvent d'un ensemble d'éléments permettant de traiter des signaux ou de transférer de l'énergie fournie par un générateur pour les restituer sous une forme quelconque à une charge extérieure. Les échanges avec l'extérieur se font au travers de deux bornes utilisées comme bornes d'entrée (côté générateur) et vers deux autres bornes utilisées comme sortie (côté charge).

Considérons le quadripôle suivant de la figure 4.1, où I_1 et V_1 désignent les grandeurs d'entrée et I_2 et V_2 celles de sortie. Cette représentation avec des courants qui entrent dans le quadripôle présente l'avantage de rendre symétriques l'entrée et la sortie. Elle est souvent adoptée par les électroniciens.

4.1.2 Équations caractéristiques

D'une façon générale, un quadripôle est défini par deux équations caractéristiques qui décrivent complètement son fonctionnement :

$$F_1(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

$$F_2(I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$

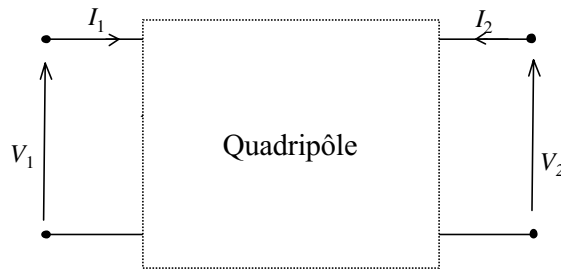


Figure 4.1 Représentation d'un quadripôle.

En les complétant d'une part avec l'équation courant-tension du générateur branché à l'entrée et de l'équation courant-tension de la charge en sortie, nous disposons du nombre nécessaire et suffisant (quatre) d'équations pour déterminer les quatre variables : I_1 , I_2 , V_1 et V_2 .

Pour généraliser l'étude des quadripôles, nous supposons les conditions suivantes :

- Les circuits du quadripôle sont linéaires, ou bien nous admettons la linéarité autour du point de fonctionnement considéré (cas du transistor par exemple).
- Les conditions initiales aux bornes des capacités et dans les inductances doivent être nulles. Nous nous limitons au régime périodique sinusoïdal établi, appelé régime harmonique.
- Les circuits internes au quadripôle ne doivent comporter que des sources contrôlées de tensions ou des sources contrôlées de courants.

4.2 REPRÉSENTATION MATRICIELLE

4.2.1 Matrice impédance

Les équations caractéristiques d'un quadripôle composé uniquement d'éléments linéaires et de sources dépendantes peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

où $[Z]$ est la *matrice impédance* du quadripôle. Les coefficients de cette matrice s'appellent les *paramètres Z* en circuit ouvert, puisqu'ils peuvent être mesurés en ouvrant successivement les circuits d'entrée et de sortie. Ils se définissent comme suit :

- $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$ est appelée impédance d'entrée en circuit ouvert (sortie à vide) ;
- $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$ est appelée impédance de transfert inverse en circuit ouvert ;
- $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$ est appelée impédance de transfert (direct) en circuit ouvert ;
- $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$ est appelée impédance de sortie en circuit ouvert.

Tout quadripôle, défini par les équations précédentes peut donc être représenté par un quadripôle équivalent dont les éléments s'expriment directement en fonction des impédances Z_{ij} précédemment définies. Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 4.2.

Le générateur de tension ($Z_{12}I_2$) est contrôlé par la grandeur de sortie I_2 , et le générateur de tension ($Z_{21}I_1$) est contrôlé par la grandeur d'entrée I_1 . Il s'agit bien de générateurs contrôlés qui ne doivent pas être remplacés par un court-circuit lorsque nous cherchons les résistances internes des générateurs de Thévenin équivalents et des générateurs de Norton équivalents.

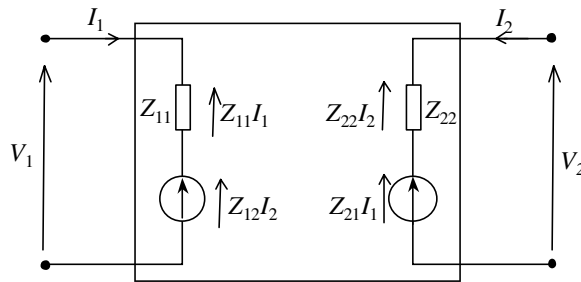


Figure 4.2 Quadripôle utilisant le modèle de la matrice en Z.



Exemple d'application. Nous déterminons les paramètres Z du quadripôle de la figure 4.3.

Nous appliquons la loi de Kirchhoff aux deux mailles de la figure 4.3.

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 I_3 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3 I_2$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 I_3 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2) = Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2$$

Nous trouvons : $Z_{11} = Z_1 + Z_3$, $Z_{22} = Z_2 + Z_3$ et $Z_{12} = Z_{21} = Z_3$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

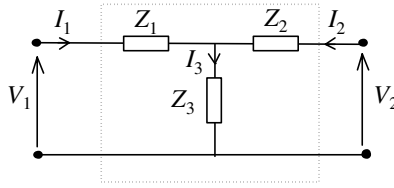


Figure 4.3 Quadripôle en T.

4.2.2 Matrice admittance

Si nous exprimons par exemple les courants I_1 et I_2 en fonction des tensions V_1 et V_2 , nous obtenons des coefficients homogènes à des admittances.

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

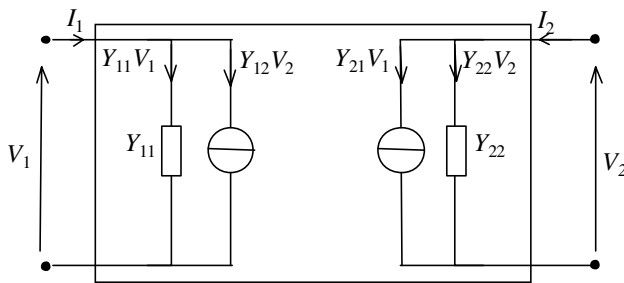
$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

où $[Y]$ représente la matrice admittance du quadripôle.

Le modèle d'un quadripôle utilisant les paramètres Y est celui donné à la figure 4.4. En comparant les équations de la matrice impédance et de la matrice admittance, nous obtenons :

$$[Z] = [Y^{-1}] \quad \text{et} \quad [Y] = [Z^{-1}]$$

Il s'agit de deux concepts duaux.

Figure 4.4 Quadripôle utilisant le modèle de la matrice en Y .

Exemple d'application. Prenons le quadripôle en π de la figure 4.5 et appliquons les lois de Kirchhoff aux nœuds d'entrée et de sortie, nous obtenons :

$$I_1 = V_1 Y_1 + (V_1 - V_2) Y_3 = (Y_1 + Y_3) V_1 - Y_3 V_2$$

$$I_2 = V_2 Y_2 + (V_2 - V_1) Y_3 = -Y_3 V_1 + (Y_2 + Y_3) V_2$$

Nous trouvons par identification :

$$Y_{11} = Y_1 + Y_3, \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3 \quad \text{et} \quad Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$$

La matrice admittance devient :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

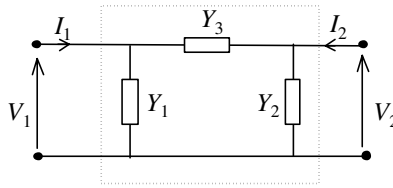


Figure 4.5 Quadripôle en π .

4.2.3 Autres représentations matricielles

Nous pouvons définir d'autres types de matrices. Le tableau récapitulatif 4.1 va nous permettre de déduire les paramètres d'une matrice en fonction des paramètres d'une autre matrice.

a) Matrice hybride $[h]$

En électronique, les tripôles actifs comme par exemple le transistor sont fréquemment transformés en quadripôle en choisissant l'une des bornes comme référence de potentiel. Ils sont mieux caractérisés si nous utilisons les paramètres (hybrides) h . Dans ce cas, nous exprimons V_1 et I_2 en fonction de I_1 et V_2 ce qui donne :

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

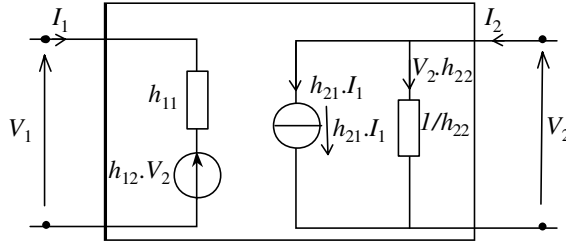
soit en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

où $[h]$ est la matrice hybride du quadripôle.

h_{11} est l'impédance d'entrée avec une sortie en court-circuit, h_{12} représente le rapport de transfert inverse en tension en circuit ouvert, h_{21} est l'amplification en courant avec une sortie en court-circuit et h_{22} est l'admittance de sortie lorsque la charge est déconnectée (circuit ouvert).

Le modèle d'un quadripôle utilisant les paramètres h est celui donné à la figure 4.6.

Figure 4.6 Quadripôle utilisant le modèle de la matrice hybride h .

b) Matrice hybride $[g]$

Nous pouvons aussi utiliser les paramètres hybrides g . Dans ce cas, nous exprimons I_1 et V_2 en fonction de V_1 et I_2 , ce qui donne :

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

soit en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [g] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

où $[g]$ est la matrice hybride du quadripôle.

c) Matrices de transfert

Si les deux grandeurs indépendantes sont relatives aux mêmes accès, la matrice est appelée matrice de transfert (également appelée *matrice chaîne*). Deux cas se présentent ou bien V_2 et I_2 sont des fonctions de V_1 et I_1 , ou vice versa :

$$\begin{cases} V_2 = T'_{11} V_1 + T'_{12} I_1 = a V_1 + b I_1 \\ I_2 = T'_{21} V_1 + T'_{22} I_1 = c V_1 + d I_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ c_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T'] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

où $[T']$ représente la matrice de transfert du quadripôle.

L'autre matrice de transfert est donnée par :

$$\begin{cases} V_1 = T_{11} V_2 + T_{12} I_2 = A V_2 + B I_2 \\ I_1 = T_{21} V_2 + T_{22} I_2 = C V_2 + D I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} \\ C_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T] \times \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

où $[T]$ représente la *matrice de transfert* du quadripôle.

Les paramètres T sont calculés, contrairement à tous les autres paramètres, avec un courant I_2 sortant du quadripôle pour permettre une mise en cascade facile.

Le tableau 4.1 permet de calculer les paramètres d'une matrice quelconque en fonction des paramètres de n'importe quelle autre matrice.

Tableau 4.1 Relations entre les paramètres d'un quadripôle

	Matrice $[Z]$	Matrice $[Y]$	Matrice $[h]$	Matrice $[g]$	Matrice $[T]$
Matrice $[Z]$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{D_{YY}} \quad \frac{-Y_{12}}{D_{YY}}$ $\frac{-Y_{21}}{D_{YY}} \quad \frac{Y_{11}}{D_{YY}}$	$\frac{D_{hh}}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$ $\frac{-h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad \frac{-g_{12}}{g_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{T_{11}}{T_{21}} \quad \frac{D_{TT}}{T_{21}}$ $\frac{1}{T_{21}} \quad \frac{T_{22}}{T_{21}}$
Matrice $[Y]$	$\frac{Z_{22}}{D_Z} \quad \frac{-Z_{12}}{D_Z}$ $\frac{-Z_{21}}{D_Z} \quad \frac{Z_{11}}{D_Z}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad \frac{-h_{12}}{h_{11}}$ $\frac{h_{21}}{h_{11}} \quad \frac{-D_{hh}}{h_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{22}} \quad \frac{g_{22}}{g_{YY}}$ $\frac{-g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$	$\frac{T_{22}}{T_{12}} \quad \frac{-D_{TT}}{T_{12}}$ $\frac{-1}{T_{12}} \quad \frac{T_{11}}{T_{12}}$
Matrice $[h]$	$\frac{D_Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{D_Z}{Z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{22}}{D_{hh}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{D_{YY}}{Y_{11}}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{D_{gg}} \quad \frac{g_{12}}{D_{gg}}$ $\frac{g_{21}}{D_{gg}} \quad \frac{g_{11}}{D_{gg}}$	$\frac{T_{12}}{T_{22}} \quad \frac{D_{TT}}{T_{22}}$ $\frac{-1}{T_{22}} \quad \frac{T_{21}}{T_{22}}$
Matrice $[g]$	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{D_{YY}} \quad \frac{D_Z}{Z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{22}}{D_{YY}}$ $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{D_{hh}} \quad \frac{-Y_{12}}{D_{hh}}$ $\frac{-h_{21}}{D_{hh}} \quad \frac{h_{11}}{D_{hh}}$	$g_{11} \quad g_{12}$ $g_{21} \quad g_{22}$	$\frac{T_{21}}{T_{11}} \quad \frac{-D_{TT}}{T_{11}}$ $\frac{1}{T_{11}} \quad \frac{T_{12}}{T_{11}}$
Matrice $[T]$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{D_Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{-D_{YY}}{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-D_{hh}}{h_{21}} \quad \frac{-h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{-h_{22}}{h_{21}} \quad \frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{D_{gg}}{g_{21}}$	$T_{11} \quad T_{12}$ $T_{21} \quad T_{22}$

$D_{pp} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$ est le déterminant des matrices $[Z]$, $[Y]$, $[h]$, $[g]$ ou $[T]$.

4.3 ASSOCIATION DE QUADRIPOLES

4.3.1 Calcul matriciel

Pour illustrer les principes des différents calculs, nous choisissons le cas simple, mais très pratique, de matrices carrées à deux lignes et deux colonnes.

► Addition de deux matrices

Soient $[X]$ et $[Y]$ deux matrices constituées chacune de deux lignes et de deux colonnes ; la matrice somme est obtenue en ajoutant les termes de même position. Le

principe reste valable si nous utilisons des matrices d'ordres plus élevés.

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$[S] = [X] + [Y] = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{bmatrix}$$

► Multiplication de deux matrices

Soient $[X]$ et $[Y]$ deux matrices constituées chacune de deux lignes et de deux colonnes, la matrice produit $[P] = [X] \times [Y]$ est obtenue en procédant de la façon suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$[P] = [X] \times [Y] = \begin{bmatrix} (x_{11} \times y_{11}) + (x_{12} \times y_{21}) & (x_{11} \times y_{12}) + (x_{12} \times y_{22}) \\ (x_{21} \times y_{11}) + (x_{22} \times y_{21}) & (x_{21} \times y_{12}) + (x_{22} \times y_{22}) \end{bmatrix}$$



Remarque : La matrice produit a le même nombre de lignes que $[X]$ et le même nombre de colonnes que $[Y]$. Le produit de deux matrices n'est donc pas commutatif. Le principe reste valable si nous utilisons des matrices d'ordres plus élevés.

► Déterminant d'une matrice

Soit $[X]$ une matrice constituée de deux lignes et deux colonnes ; le déterminant de la matrice est obtenue de la façon suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

le déterminant est : $\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$.

► Inversion d'une matrice

Soit $[X]$ une matrice constituée de deux lignes et deux colonnes, la matrice inverse est obtenue de la façon suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

la matrice inverse $[X]^{-1}$ est : $\frac{1}{\Delta} \times \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix}$

Dans le cas général, la matrice inverse $[X]^{-1}$ est : $\frac{1}{\Delta} \times \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$

Les termes de la matrice sont obtenus en procédant comme suit : nous transposons chaque terme x_{ji} , nous prenons le cofacteur et nous divisons par le déterminant.

4.3.2 Association en série de deux quadripôles

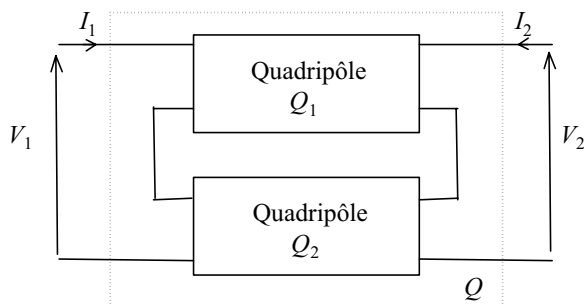


Figure 4.7 Association en série de deux quadripôles.

Une association en série de deux quadripôles Q_1 et Q_2 dont les paramètres sont en circuit ouvert conserve les courants I_1 et I_2 . La matrice Z du quadripôle noté Q équivalent à la mise en série de Q_1 et de Q_2 possède une matrice Z donnée par : $Z = Z_1 + Z_2$. Nous retrouvons ainsi la loi d'association des impédances en série de façon matricielle.

4.3.3 Association en parallèle de deux quadripôles

Dans le cas de l'association en parallèle de deux quadripôles Q_1 et de Q_2 , les tensions sont communes aux deux quadripôles, nous utilisons donc les matrices admittances. Les paramètres Y s'obtiennent simplement en ajoutant terme à terme les paramètres Y de chaque quadripôle : $Y = Y_1 + Y_2$.

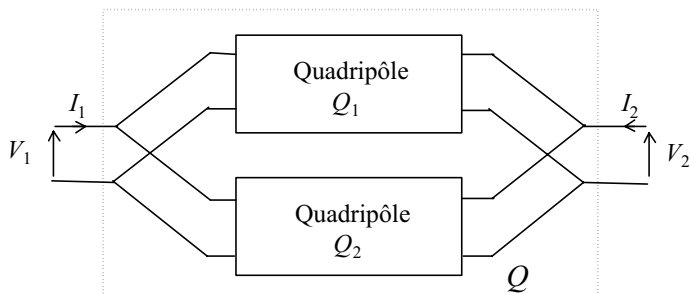


Figure 4.8 Association en parallèle de deux quadripôles.

4.3.4 Association en cascade de deux quadripôles

Dans le cas d'une mise en cascade de deux quadripôles Q_1 et Q_2 , l'utilisation des paramètres de transfert devient particulièrement avantageuse :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T_1] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = [T_1] \times \begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix}$$

comme $V'_1 = V_2$ et $I'_1 = I_2$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = [T_2] \times \left([T_1] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \right) = ([T_2] \times [T_1]) \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

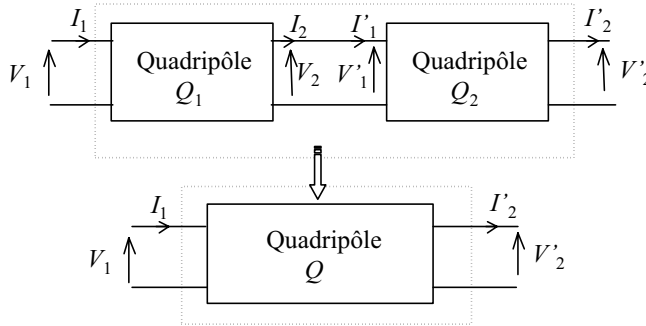


Figure 4.9 Association en cascade de deux quadripôles.

Le quadripôle équivalent est défini par sa matrice $[T]$ telle que : $[T] = [T_1] \times [T_2]$.

4.4 QUADRIPOLES EN CHARGE

Les quadripôles électriques sont utilisés pour réaliser une fonction particulière : amplification, filtrage... De ce fait, les quadripôles sont chargés soit par une vraie impédance de charge, soit par un circuit électrique qui se comporte vis-à-vis du quadripôle comme une impédance de charge.

4.4.1 Caractéristiques d'un quadripôle en charge

Caractériser un quadripôle, c'est déterminer les quatre valeurs I_1 , I_2 , V_1 et V_2 qui régissent son fonctionnement. Quatre équations sont nécessaires alors que le quadripôle lui-même n'en fournit que deux. Les deux autres sont obtenues en prenant en compte le circuit d'entrée (une équation) et le circuit de sortie (une équation).

En effet aux deux bornes d'entrée est connecté un dipôle source qui excite le quadripôle et qui comporte en général un générateur. Aux deux bornes de sortie, nous branchons un dipôle de charge ou d'utilisation noté Z_U .

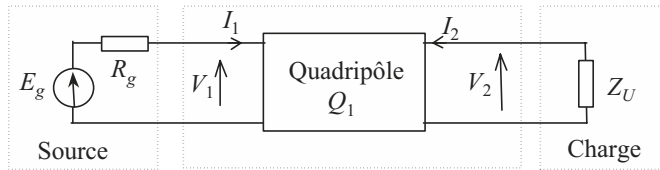


Figure 4.10 Quadripôle en charge attaqué par une source réelle.

Si par exemple nous définissons le quadripôle par ses paramètres Z , les quatre équations qui permettent de déterminer complètement l'état du réseau sont :

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$E_g = V_1 + R_g I_1 \quad \text{et} \quad V_2 = -Z_U I_2$$

Or, pour étudier le transfert d'énergie d'une part de la source vers le quadripôle et d'autre part du quadripôle vers la charge, il est plus intéressant de calculer les impédances d'entrée et de sortie du quadripôle non plus en court-circuit ou en circuit ouvert (comme les fournissent les paramètres Z ou Y) mais dans le cas réel qui consiste à connecter le quadripôle aux dipôles de source et de charge.

4.4.2 Impédances d'entrée et de sortie

a) Impédance d'entrée

L'impédance que présente le quadripôle vis-à-vis de la source est appelée : impédance d'entrée Z_e . Des équations précédentes il vient :

$$-Z_U I_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2, \quad \text{ce qui donne :} \quad I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_{22} + Z_U}$$

En reportant cette valeur dans la première équation, il vient :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_U}$$

b) Impédance de sortie

Vis-à-vis de la charge, le quadripôle attaqué par le dipôle source (générateur) se comporte comme un dipôle modélisé par son générateur de Thévenin équivalent.

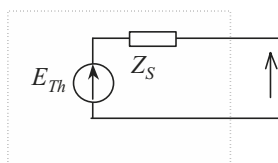


Figure 4.11 Modèle de Thévenin en sortie du quadripôle.

Le modèle équivalent de Thévenin fait apparaître un générateur E_{TH} en série avec une impédance appelée *impédance de sortie* Z_S . Pour calculer cette impédance il faut passiver la source qui attaque le quadripôle en entrée, ce qui revient à court-circuiter la source de tension sans annuler sa propre résistance interne. Nous calculons ensuite l'impédance que voit un générateur placé en sortie lorsque l'impédance de charge Z_U est débranchée :

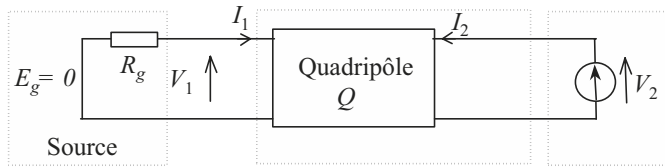


Figure 4.12 Méthode de calcul de Z_S .

L'impédance de sortie Z_S vaut alors :
$$Z_S = \frac{V_2}{I_2}$$

Si le quadripôle est défini par ses paramètres Z , il résulte :

$$Z_S = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{R_g + Z_{11}}$$

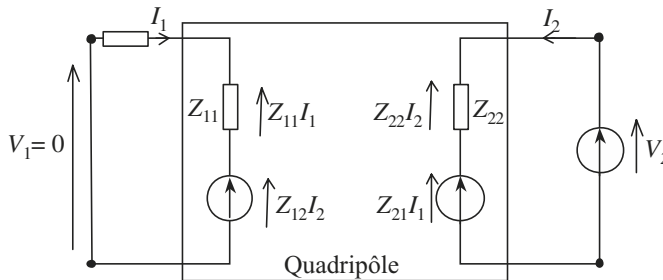


Figure 4.13 Méthode de calcul de Z_S d'un quadripôle présenté par sa matrice Z .

c) Impédance image

Nous savons que l'énergie transmise de la source vers le quadripôle est maximale si $R_g = Z_e$, et que l'énergie transmise du quadripôle vers la charge est maximale en cas d'adaptation d'impédance. $Z_S = Z_U^*$. Z_U^* représente le complexe conjugué de Z_U . Z_U intervient dans l'expression de l'impédance d'entrée Z_e et la valeur de Z_S dépend de R_g . Nous appelons *impédance d'entrée image* Z_{ie} et *impédance de sortie image* Z_{is} , les deux impédances telles que Z_{ie} est l'impédance d'entrée du quadripôle lorsque la sortie est chargée par Z_{is} (figure 4.14 (a)) et inversement (figure 4.14 (b)).

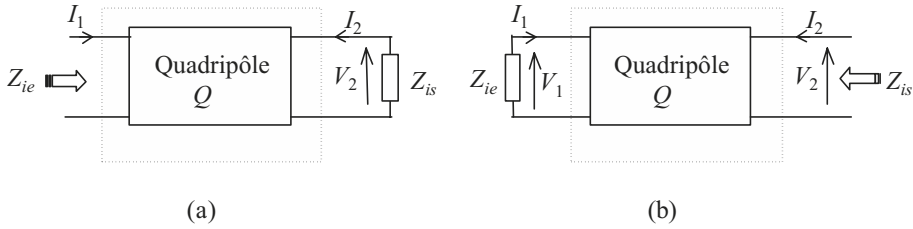


Figure 4.14 Modèles avec les impédances images Z_{ie} et Z_{is} .

La condition de transfert d'énergie s'écrit alors : $R_g = Z_{ie}$ et $Z_{is} = Z_U^*$.

Les impédances images valent dans ce cas :

$$Z_{ie} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{is} + Z_{22}} \quad \text{et} \quad Z_{is} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{ie} + Z_{11}}$$

d) Impédance caractéristique

Nous définissons une impédance de charge particulière qui soit égale à l'impédance d'entrée du quadripôle. Il s'agit de l'*impédance caractéristique ou impédance itérative* notée : $Z_U = Z_0$. Une définition semblable peut-être donnée pour l'impédance de sortie. Nous avons alors :

$$Z_0 = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_0 + Z_{22}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_0 + Z_{11}}$$

ce qui donne : $Z_0^2 = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

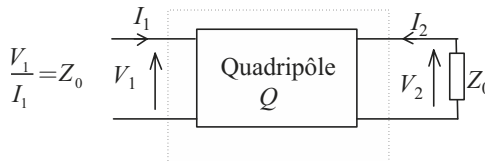


Figure 4.15 Modèle avec les impédances caractéristiques Z_0 .

La condition de transfert maximum d'énergie devient alors : $R_g = Z_0$.



Remarque : Lorsque plusieurs quadripôles sont montés en cascade, le dernier étant chargé par Z_0 , son impédance d'entrée qui est l'impédance de charge de l'avant-dernier quadripôle est égale à Z_0 et ainsi de suite jusqu'au premier. La condition de transfert maximal d'énergie reste toujours : $R_g = Z_0$.

4.4.3 Quadripôles particuliers

a) Quadripôle passif

Nous appelons quadripôle passif un quadripôle ne comportant pas de générateurs de tension ou de courant. Le théorème de réciprocité permet alors d'écrire :

$$Z_{21} = Z_{12} \quad \text{et} \quad Y_{21} = Y_{12}$$

Nous montrons aussi que : $h_{12} = -h_{21}$

b) Quadripôle symétrique

Un quadripôle est symétrique s'il existe dans la disposition, la nature et les valeurs des éléments constituant le quadripôle, une symétrie entre sortie et entrée. Nous avons alors :

$$Z_{11} = Z_{22}, \quad Y_{11} = Y_{22} \quad \text{et} \quad T_{11} = -T_{22}$$

Le signe « - » de cette dernière relation vient du défaut de symétrie dans les sens des courants d'entrée et de sortie. En effet, le courant I_2 pour la matrice de transfert est considéré sortant et non entrant comme pour les autres matrices.

c) Quadripôle unidirectionnel

Prenons par exemple, un amplificateur radio mis sous forme d'un quadripôle. L'antenne fournit un signal électrique. Amplifié, ce signal va exciter le haut-parleur. Il va de soi que nous ne pouvons pas inverser le sens de branchement, c'est-à-dire envoyer le signal de l'antenne sur les bornes de sortie et brancher le haut-parleur aux bornes d'entrée. Nous disons alors que l'amplificateur constitue un *quadripôle unidirectionnel*.

Dans un quadripôle unidirectionnel, l'énergie ne peut-être transmise que dans un seul sens : de l'entrée vers la sortie. Le modèle équivalent d'un quadripôle unidirectionnel est donné à la figure 4.16.

Vu des bornes d'entrée, le quadripôle accepte l'énergie que lui fournit la source. Il est donc assimilable à une impédance Z_e appelée *impédance d'entrée*.

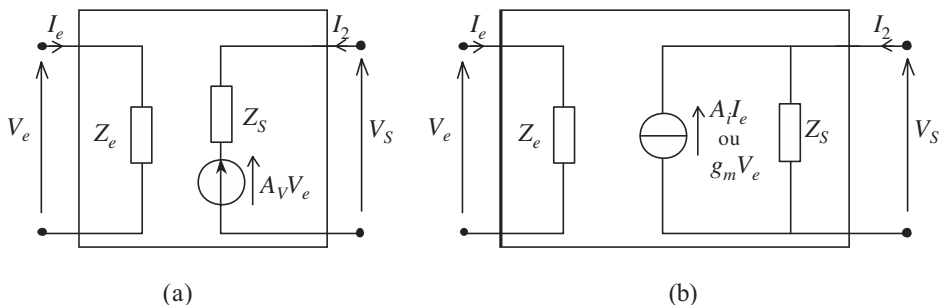


Figure 4.16 Modèle de Thévenin (a) et de Norton (b) d'un quadripôle unidirectionnel.

Vu des bornes de sortie, le quadripôle se comporte comme un générateur, qui se met sous la forme d'une source de tension (modèle de Thévenin de la figure 4.16 (a)), ou d'une source de courant (modèle de Norton de la figure 4.16 (b)). R_s est la résistance interne de ces générateurs. Elle est alors la *résistance de sortie* du quadripôle. A_v et A_i sont respectivement l'*amplification* en tension et l'*amplification* en courant du quadripôle. g_m dont l'unité est le siemens, représente la *transconductance* ou la *pente* du quadripôle.

À noter que, pour des quadripôles unidirectionnels, les paramètres Z_{12} , Y_{12} et h_{12} sont nuls.

4.5 FONCTION DE TRANSFERT

4.5.1 Étude en fonction de la fréquence

Soit un réseau linéaire excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω . L'entrée notée $e(t)$ qui peut être un courant ou une tension, provoque une réponse forcée (régime permanent établi) du réseau. Nous notons $s(t)$ cette réponse.

$$e(t) = E \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad s(t) = S \sin(\omega t + \phi)$$

Compte tenu des deux grandeurs électriques habituelles, nous pouvons définir quatre transmittances ou fonctions de transfert :

$$\frac{V_2}{V_1} ; \quad \frac{I_2}{I_1} ; \quad \frac{I_2}{V_1} ; \quad \frac{V_2}{I_1}$$

qui représentent respectivement : l'amplification en tension, l'amplification en courant, la trans-admittance et la trans-impédance. D'une façon générale ces fonctions de transfert s'écrivent sous forme complexe :

$$H(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation des signaux électriques et f leur fréquence.

Les fonctions de transfert s'écrivent également sous une autre forme équivalente :

$$H(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)} = A(\omega) [\cos(\phi) + j \sin(\phi)]$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{b}{a}$$

$A(\omega)$ est appelé le module de la fonction de transfert et $\phi(\omega)$ est l'argument ou déphasage de la sortie par rapport à l'entrée .

Ainsi, l'étude du module et de l'argument de la fonction de transfert donnera des informations utiles pour prévoir la réponse du système dans d'autres conditions d'excitation. Nous verrons ultérieurement les modalités précises de représentation de ces quantités.

Il existe deux diagrammes différents pour représenter l'évolution de $H(j\omega)$ en fonction de la pulsation (ou la fréquence) :

- le *diagramme de Nyquist* qui en est une représentation polaire ;

– le *diagramme de Bode* qui est une représentation paramétrique de H .

Même si la représentation de Nyquist est intéressante, surtout pour les problèmes de stabilité, nous nous limiterons à étudier la représentation de Bode universellement connue.

4.5.2 Diagrammes de Bode

La représentation de Bode consiste à tracer séparément d'une part, la variation du module et d'autre part, la variation de l'argument de la fonction de transfert d'un système en fonction de la fréquence (ou de la pulsation). Mais il convient de remarquer que si très naturellement nous choisissons d'exprimer $\phi(\omega)$ en radians (ou en degrés), nous préférons utiliser des logarithmes pour représenter le module de $H(j\omega)$. Nous adoptons aussi, pour le module et pour la phase, des unités en $\log(\omega)$ en abscisses.

a) Échelles logarithmiques

► Axe des x

Dans le cas où les variations relatives de l'une des grandeurs sont très importantes, les échelles linéaires présentent un inconvénient d'ordre pratique. En effet, il est impossible de connaître avec précision l'allure de la courbe aux faibles valeurs. L'échelle logarithmique permet de réaliser une *décompression* de l'origine et une *compression* de l'infini. En échelle logarithmique, tous les intervalles correspondant à une variation dans un rapport de dix ont une même valeur. Ces intervalles sont des *décades*.

Ce cas est souvent rencontré par exemple en étudiant la réponse d'un filtre ou d'un amplificateur en fonction de la fréquence. Cette fréquence peut varier dans de grandes proportions. Si nous prenons par exemple le cas des fréquences audibles, le nombre de décades sera de trois, puisque la fréquence varie de 20 Hz à 20 000 Hz (le nombre de décades peut être beaucoup plus important dans d'autres cas). Nous remarquons que sur l'échelle logarithmique, nous ne pouvons pas atteindre l'origine qui est repoussée à $-\infty$.

► Axe des y

L'amplitude est le plus souvent un produit de facteur correspondant à plusieurs étages ; la représentation logarithmique permet de remplacer les produits d'amplitude par leurs sommes algébriques. Nous utilisons souvent une unité noté le décibel (dB). La définition du décibel découle directement du rapport de la puissance délivrée en sortie P_2 sur la puissance injectée en entrée P_1 .

$$\frac{P_2}{P_1} \text{ (dB)} = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

Si par exemple $\frac{P_2}{P_1} = 100$, nous trouvons : $10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 10 \log (100) = 20 \text{ dB}$.

En électricité, les puissances considérées sont souvent les puissances actives dissipées dans des résistances, et provenant de l'application à ces résistances de certaines tensions, ou de la circulation dans ces résistances de certains courants :

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = R_1 I_1^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} = R_2 I_2^2$$

Nous trouvons dans le cas particulier $R_1 = R_2 = R$:

$$10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 20 \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 20 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \text{ en dB}$$

En électricité et en électronique, même si le quadripôle n'est pas adapté en impédance en sortie et en entrée, nous utilisons souvent cette dernière définition pour calculer le module de la fonction de transfert.

b) Diagrammes universels de Bode

La simplification précédente n'est valable que si les deux résistances d'entrée et de charge sont identiques : $R_1 = R_2 = R$. C'est le cas par exemple en téléphonie avec une résistance de 600 Ω .

Mais il est souvent indispensable de considérer le gain en tension lorsque l'impédance d'entrée d'un quadripôle (transistor à effet de champ, filtre actif...) est infinie : le gain en puissance n'a plus de sens. En électricité et en électronique, même si le quadripôle n'est pas adapté en impédance en sortie et en entrée, nous utilisons toujours la dernière définition pour calculer le module de la fonction de transfert.

En utilisant la même expression précédente, nous exprimons toujours le gain en tension G , exprimé en dB :

$$G(\text{dB}) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

c) Avantage de la notion de décibel

Nous démontrons que toute fonction de transfert $H(j\omega)$ peut toujours se décomposer en un produit de fonctions du premier ou du second degré en $j\omega$ à coefficient réel. Ceci revient à mettre en cascade plusieurs quadripôles élémentaires :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \cdot H_3(j\omega) \cdot \dots \cdot H_n(j\omega)$$

Ce qui s'écrit en utilisant la forme exponentielle :

$$H(j\omega) = [A_1(j\omega) e^{j\phi_1}] \cdot [A_2(j\omega) e^{j\phi_2}] \cdot \dots \cdot [A_n(j\omega) e^{j\phi_n}]$$

soit en regroupant les termes :

$$H(j\omega) = [A_1(j\omega) \cdot A_2(j\omega) \cdot \dots \cdot A_n(j\omega)] \cdot e^{j(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n)} = A(j\omega) e^{j\phi}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{i=n} \phi_i \quad \text{et} \quad A(j\omega) = \prod_{i=1}^{i=n} A_i(j\omega)$$

Nous pouvons déduire le gain en décibel :

$$G(\text{dB}) = 20 \log |A(j\omega)| = 20 \log |A_1(j\omega)| + 20 \log |A_2(j\omega)| + \dots + 20 \log |A_n(j\omega)|$$

$$G(\text{dB}) = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^{i=n} G_i$$

Afin d'obtenir un diagramme simple à construire, nous utilisons l'échelle logarithmique pour transformer le produit en somme. Le diagramme de Bode s'obtient alors facilement par addition des diagrammes élémentaires de G_i et de ϕ_i .



Remarque : Un nombre positif de décibels correspond à un gain effectif avec une tension de sortie supérieure à la tension d'entrée. Un nombre négatif de décibels correspond à une atténuation ou un affaiblissement.

4.5.3 Principales fonctions élémentaires

Le nombre de diagrammes élémentaires pouvant apparaître pour $H(j\omega)$ étant très réduit, étudions chacune de ces fonctions de transfert.

a) Diagrammes de Bode d'une fonction constante $H(j\omega) = K$

Le gain vaut : $G_{\text{dB}} = 20 \log(K)$ et l'argument $\phi = 0$ pour des valeurs de $K > 0$ ou bien $\phi = \pm\pi$ pour des valeurs de $K < 0$. Par convention, nous prenons dans ce dernier cas : $\phi = -\pi$

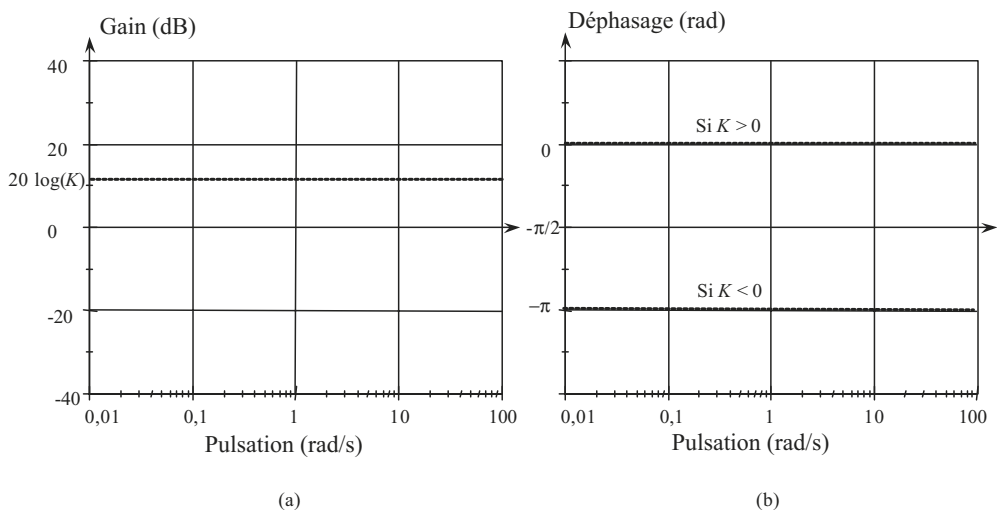


Figure 4.17 Courbes de Bode de la fonction $H(j\omega) = K$.

b) Diagrammes de Bode d'une fonction $H(j\omega) = j\omega/\omega_0 = jx$

La fonction de transfert, sous la forme d'un imaginaire pur est simple à étudier :

$$G(\text{dB}) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_0)$$

Le déphasage reste toujours : $\phi = \frac{\pi}{2}$

Nous pouvons tracer les courbes de Bode en fonction du logarithme de la pulsation (ou de la fréquence), mais nous pouvons aussi normaliser l'axe des abscisses en prenant une pulsation (ou une fréquence) normalisée appelée aussi pulsation réduite et notée $x = \omega/\omega_0$. Rappelons que, dans ce cas, dans la mesure où un choix a été effectué, l'origine des abscisses n'apparaît pas puisqu'elle est rejetée à « $-\infty$ ».

Pour calculer la pente de la droite, nous prenons deux pulsations ω et $\omega' = 10 \omega$ qui sont dans un rapport égal à 10. Autrement dit, nous avons une variation d'une décade sur l'axe des x . La variation du gain pour une décade nous donne directement l'ordre de la fonction :

- une pente de +20 dB par décade est une pente +1 ;
- une pente de -20 dB par décade est une pente -1 ;
- une pente de $+n \times 20$ dB/décade est une pente $+n$;
- une pente de $-n \times 20$ dB/décade par décade est une pente $-n$.

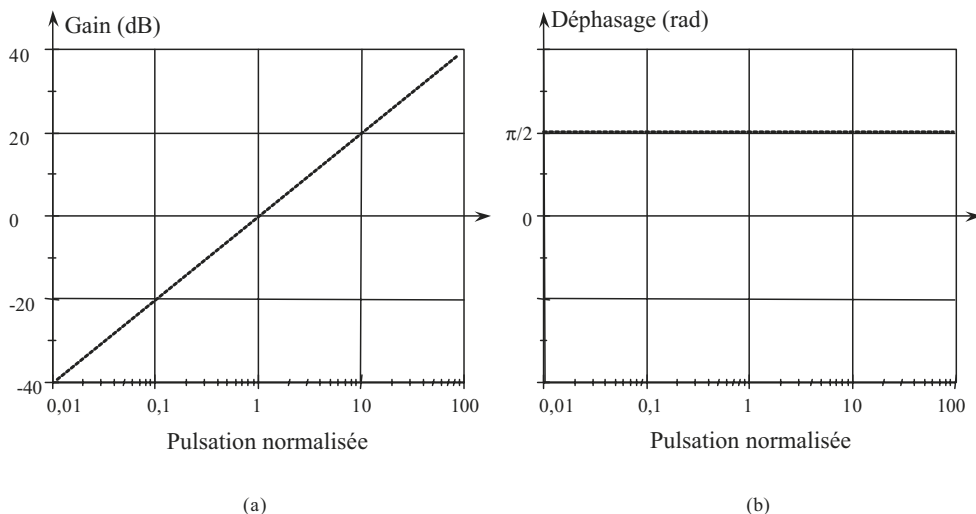


Figure 4.18 Courbes de Bode de la fonction $H(j\omega) = H(jx) = jx$.

c) *Diagrammes de Bode d'une fonction $H(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_0 = 1 + jx$*

La fonction de transfert s'écrit sous la forme : $a + jb$. Nous calculons l'amplification et le déphasage en fonction de la pulsation.

L'amplification $A(\omega)$ qui représente le module de la fonction de transfert est :

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

La représentation graphique du gain en dB en fonction de $\log(\omega)$ ou $\log(f)$ présente deux asymptotes distinctes :

- Si $\omega \ll \omega_0$, l'amplification est : $A(\omega \ll \omega_0) \approx 1$, soit : $G(\text{dB}) = 0$.

La courbe du gain est une droite horizontale qui coïncide avec l'axe des x , nous disons qu'il s'agit d'une asymptote horizontale. Le déphasage reste toujours égal à zéro : $\phi = 0$.

- Si $\omega \gg \omega_0$ l'amplification est : $A(\omega \gg \omega_0) \approx \frac{\omega}{\omega_0}$ soit :

$$G(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_0)$$

Le déphasage devient : $\phi = \frac{\pi}{2}$.

L'asymptote du gain donne une variation de +20 dB lorsque la pulsion varie dans un rapport égal à une décade. Il s'agit d'une pente +1.

Les diagrammes (courbes) limités aux asymptotes, représentés à la figure 4.19 en pointillés sont appelés *diagrammes (ou courbes) asymptotiques* de Bode.

Pour tracer les courbes réelles du module ou de la phase, il serait préférable de commencer toujours par mettre les diagrammes asymptotiques, puis effectuer les tracés en corrigeant les valeurs. Les écarts entre les courbes réelles et les diagrammes asymptotes sont donnés pour quelques valeurs particulières dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Différences entre courbes asymptotiques et valeurs réelles

Valeur de ω	$0,2\omega_0$	$0,5\omega_0$	ω_0	$2\omega_0$	$5\omega_0$
Gain réel – gain asymptotique	0,17	1	3	1	0,17
Erreur de phase en degré	–11	–26	45	26	11

Pour $\omega = \omega_0$, le gain réel est toujours de 3 dB. La pulsation $\omega = \omega_0$ est appelée souvent pulsation de coupure ou pulsation caractéristique, nous disons aussi pulsation de cassure.

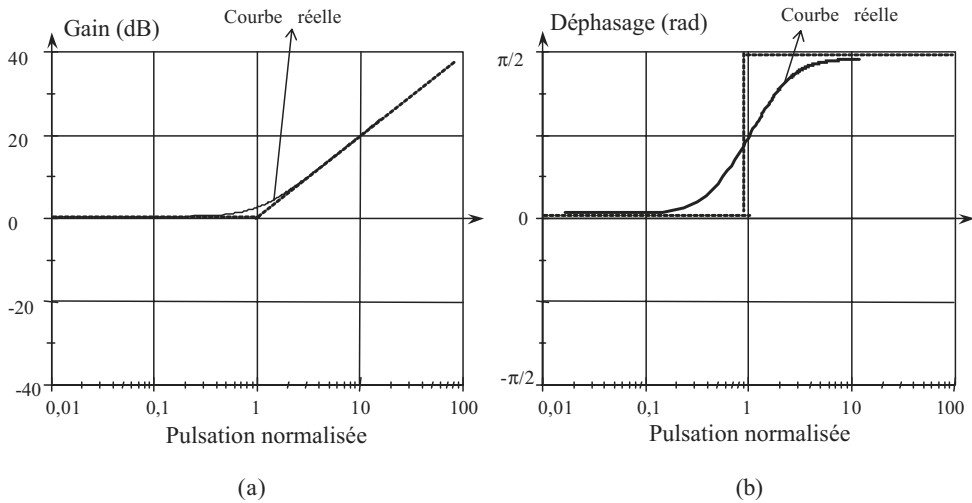


Figure 4.19 Courbe réelle et courbe asymptotique du gain (a) et courbe réelle et courbe asymptotique de la phase (b).

d) Diagrammes de Bode d'une fonction de second ordre

Le dénominateur d'une telle fonction est un polynôme de second degré de la variable x (ou $j\omega$). Ce polynôme, très utilisé en électronique et en automatique, sert à obtenir des filtres passe-bas de second ordre.

Le passage à des filtres passe-haut ou passe-bande s'obtient en multipliant la fonction de transfert précédente par une fonction sans dénominateur.

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + j^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K}{1 + 2jmx - x^2}$$

Les diagrammes asymptotiques sont donnés en étudiant les limites. Pour cela, nous calculons le module et l'argument :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \text{et : } \phi = -\arctan\left(\frac{2mx}{1 - x^2}\right)$$

K étant une constante, nous pouvons supposer $K = 1$.

- Si $x \ll 1$, c'est à dire si : $\omega \ll \omega_0$, $|H(j\omega)| \approx 1$ soit : $G = 20 \log(1) = 0$ dB. L'asymptote est donc horizontale. Le déphasage est : $\phi = -\arctan(0) = 0$. Il s'agit aussi d'une asymptote horizontale.
- Si $x \gg 1$, c'est à dire si : $\omega \gg \omega_0$, $|H(j\omega)| \approx \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ soit : $G = 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$

$$G = 40 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Le déphasage est : $\phi = -\pi$

Pour le gain, nous trouvons deux asymptotes : l'une est horizontale, l'autre est une asymptote de pente -2 ou -40 dB/décade : figure 4.20 (a).

Pour la phase, nous trouvons aussi deux asymptotes : une asymptote horizontale à 0 et une autre asymptote horizontale à $-\pi$: figure 4.20 (b).

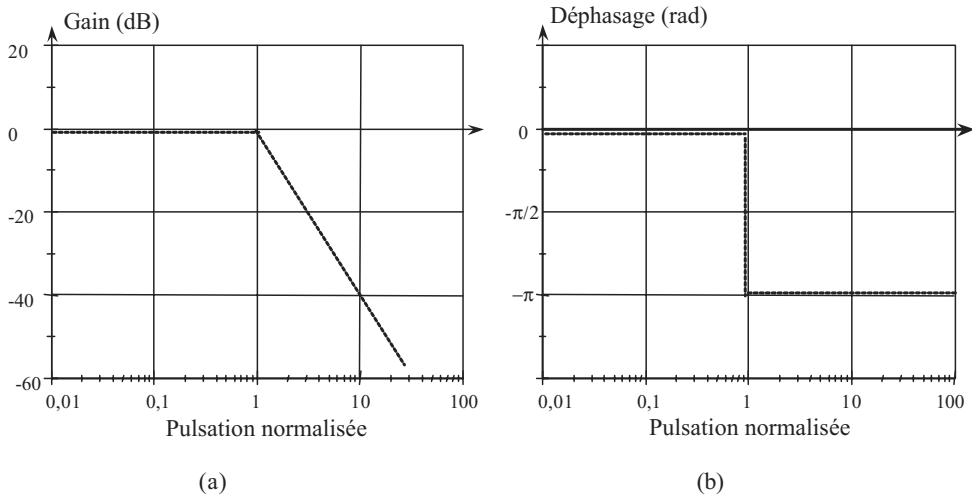


Figure 4.20 Courbes asymptotiques du gain et de la phase.

L'étude de la variation réelle du gain et de la variation réelle de la phase en fonction de la fréquence montre que trois cas se présentent selon le signe du discriminant du polynôme de second ordre.

► Régime critique

Ce cas, qui correspond à un polynôme de second ordre à deux racines identiques, présente peu d'intérêt.

► Régime apériodique

Le discriminant est positif, le polynôme possède deux racines réelles. Il est donc possible de le décomposer en deux facteurs de premier ordre.

$$H(j\omega) = K \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)} \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec : $\omega_1 = \omega_0 \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$

Le système revient à la mise en cascade de deux fonctions simples du premier ordre. Les tracés asymptotiques se construisent en ajoutant les tracés des deux fonctions construits séparément. Nous remarquons que : $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ et que, pour $\omega = \omega_0$, le déphasage est de $-\pi/2$. La pulsation de coupure notée ω_C est toujours inférieure à ω_2 . ω_1 et ω_2 , étant deux pulsations de cassures. Les tracés de la courbe du gain et du déphasage en fonction de la fréquence (figure 4.21) sont faits dans le cas suivant : $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$ et $K = 10$.

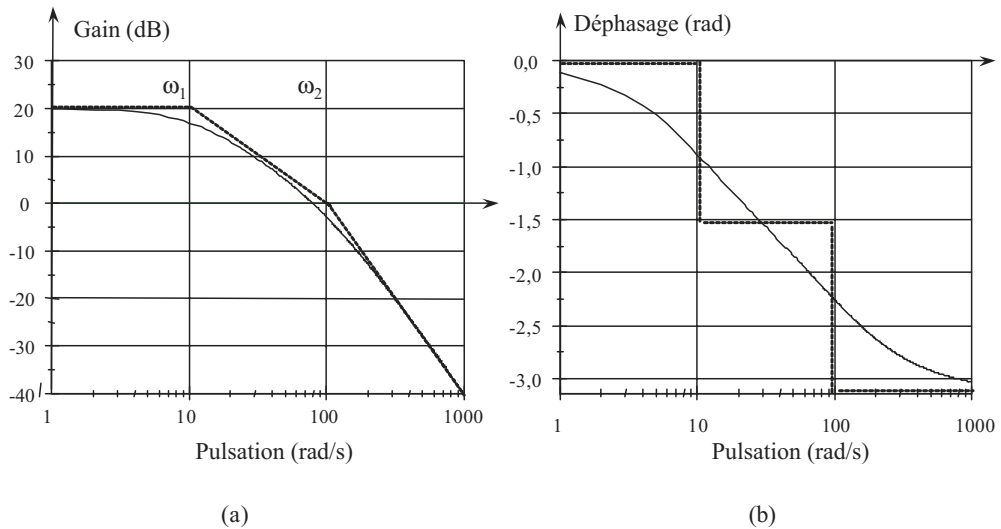


Figure 4.21 Courbes de Bode et tracés asymptotiques d'un filtre passe-bas d'ordre 2 dans le cas : $m > 1$.

► Système à faible amortissement – Régime oscillant

Le discriminant est négatif, le polynôme possède deux racines complexes conjuguées notées respectivement :

$$-m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

La fonction de transfert devient :

$$H(p) = K \frac{\omega_0^2}{(j\omega + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-m^2)}$$

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2 x^2}}$$

Le déphasage est :

$$\phi = -\arctan \left(\frac{2m \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Le calcul de la dérivée du module de la fonction de transfert montre que selon la valeur du coefficient d'amortissement m , la courbe présente deux aspects distincts (figure 4.22). La dérivée de $|H|$ par rapport à x donne :

$$\frac{dH}{dx} = -2Kx \frac{2m^2 - 1 + x^2}{\left[(1 - x^2)^2 + 4a^2x^2 \right]^{3/2}}$$

En dehors du cas mathématique pour lequel $x = 0$, la dérivée ne peut s'annuler que si $x^2 = 1 - 2m^2$. Autrement dit, la courbe ne présente de maximum que si $m < \sqrt{2}/2$. Les coordonnées du maximum sont :

$$x_M = \sqrt{1 - 2m^2} \quad \text{et} \quad H_M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

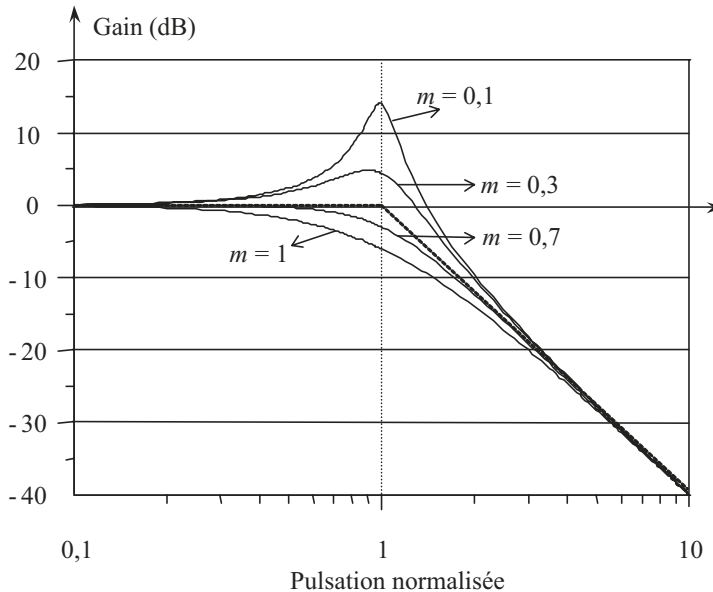


Figure 4.22 Courbes du gain et tracés asymptotiques d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour différents cas de m .

Nous constatons que la pulsation qui permet d'avoir la valeur maximale n'est pas ω_0 mais $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$. Cette pulsation tend vers ω_0 pour $m \ll 1$. Dans ce cas, l'amplitude de la sortie tend vers ∞ . Le système devient instable (oscillant). Le maximum H_M est égal au facteur de surtension Q .

$$H_M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \approx \frac{1}{2m} = Q$$

où ω_0 est la pulsation propre, m est le coefficient d'amortissement et K est le gain statique.

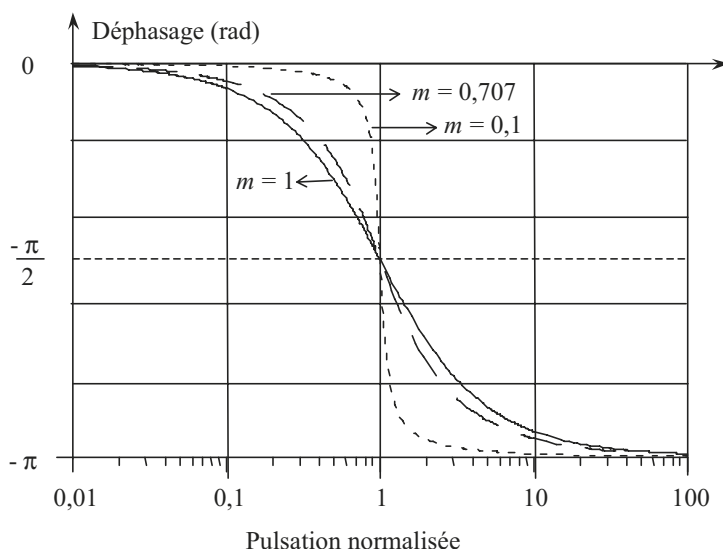


Figure 4.23 Courbes du déphasage d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour différents cas de m .

Pour des pulsations $\omega \ll \omega_0$. Le coefficient de qualité Q est donné par $Q = \frac{1}{2m}$.

Des abaques sont alors utilisés pour obtenir les courbes réelles qui sont alors très dépendantes de la valeur du coefficient d'amortissement m .

CE QU'IL FAUT RETENIR

► Les équations caractéristiques d'un quadripôle composé uniquement d'éléments linéaires et de sources dépendantes peuvent s'écrire en utilisant la notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Où $[Z]$ est la *matrice impédance* du quadripôle. Les coefficients de cette matrice s'appellent les *paramètres Z* en circuit ouvert :

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{impédance d'entrée ; } Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{impédance de transfert inverse ;}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{impédance de transfert direct ; } Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{impédance de sortie.}$$

► On trouve aussi pour un quadripôle d'autres notations matricielles : matrice $[Y]$, matrice hybride $[h]$, matrice hybride $[g]$ ou matrice de transfert $[T]$.

► Pour une association en série de deux quadripôles Q_1 et Q_2 , la matrice Z du quadripôle noté Q équivalent à la mise en série de Q_1 et de Q_2 possède une matrice Z donnée par : $Z = Z_1 + Z_2$.

► Pour une association en parallèle de deux quadripôles Q_1 et de Q_2 , les paramètres Y s'obtiennent en ajoutant terme à terme les paramètres Y de chaque quadripôle : $Y = Y_1 + Y_2$.

► Dans le cas d'une mise en cascade de deux quadripôles Q_1 et Q_2 , il est avantageux d'utiliser les paramètres de transfert. La matrice $[T]$ devient : $[T] = [T_1] \times [T_2]$.

► Pour un quadripôle, on définit l'impédance d'entrée Z_e , l'impédance de sortie Z_s , l'impédance d'entrée image Z_{ie} , l'impédance de sortie image Z_{is} et l'impédance caractéristique Z_0 :

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_U} \quad ; \quad Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{R_g + Z_{11}}$$

$$Z_{ie} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{is} + Z_{22}} \quad \text{et} \quad Z_{is} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{ie} + Z_{11}} ;$$

$$Z_0 = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_0 + Z_{22}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_0 + Z_{11}}$$

► Soit un réseau linéaire excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω . L'entrée $e(t) = E \sin(\omega t)$ provoque une réponse forcée $s(t) = S \sin(\omega t + \phi)$ (régime permanent établi).

On définit quatre transmittances ou fonctions de transfert :

$$\frac{V_2}{V_1} ; \quad \frac{I_2}{I_1} ; \quad \frac{I_2}{V_1} ; \quad \frac{V_2}{I_1}.$$

Ces fonctions de transfert s'écrivent sous forme complexe : $H(\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$, où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation des signaux électriques et f leur fréquence.

On écrit aussi :

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} = A(\omega)[\cos(\phi) + j\sin(\phi)] \quad \text{et} \quad A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{b}{a}$$

$A(\omega)$ est le module et $\phi(\omega)$ est l'argument ou déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

► Pour représenter l'évolution de $H(j\omega)$ en fonction de la pulsation (ou la fréquence), on utilise souvent la représentation de Bode :

$$G(\text{dB}) = 20 \log(A(\omega)) = 20 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \text{en fonction de la pulsation (ou fréquence)}$$

$\phi(\omega)$ qui représente le déphasage en fonction de la pulsation (ou fréquence)

Si on a : $H(j\omega) = [A_1(j\omega)e^{j\phi_1}] \times [A_2(j\omega)e^{j\phi_2}] \times \dots \times [A_n(j\omega)e^{j\phi_n}]$, on obtient :

$$\phi = \sum_{i=1}^{i=n} \phi_i \quad \text{et} \quad A(j\omega) = \prod_{i=1}^{i=n} H_i(j\omega),$$

$$\text{soit : } G(\text{dB}) = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^{i=n} G_i$$

► Exemple du diagrammes de Bode d'une fonction $H(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_0 = 1 + jx$.

L'amplification $A(\omega)$ de la fonction de transfert est :

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

La représentation graphique du gain en dB en fonction de $\log(\omega)$ ou $\log(f)$ présente deux asymptotes distinctes :

Si $\omega \ll \omega_0$, l'amplification est : $A(\omega \ll \omega_0) \approx 1$, soit : $G(\text{dB}) = 0$. La courbe du gain est une droite horizontale qui coïncide avec l'axe des x , nous disons qu'il s'agit d'une asymptote horizontale. Le déphasage reste toujours égal à zéro : $\phi = 0$.

Si $\omega \gg \omega_0$, on a : $A(\omega \gg \omega_0) \approx \frac{\omega}{\omega_0}$, soit :

$$G(\text{dB}) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_0)$$

Le déphasage devient : $\phi = \frac{\pi}{2}$

L'asymptote du gain donne une variation de +20 dB lorsque la pulsation varie dans un rapport égal à une décade. Il s'agit d'une pente +1. Les diagrammes (courbes) limités aux asymptotes, représentés à la figure en pointillés sont appelés *diagrammes (ou courbes) asymptotiques* de Bode.

Pour $\omega = \omega_0$, le gain réel est toujours de 3 dB. La pulsation $\omega = \omega_0$ est appelée « pulsation caractéristique ».

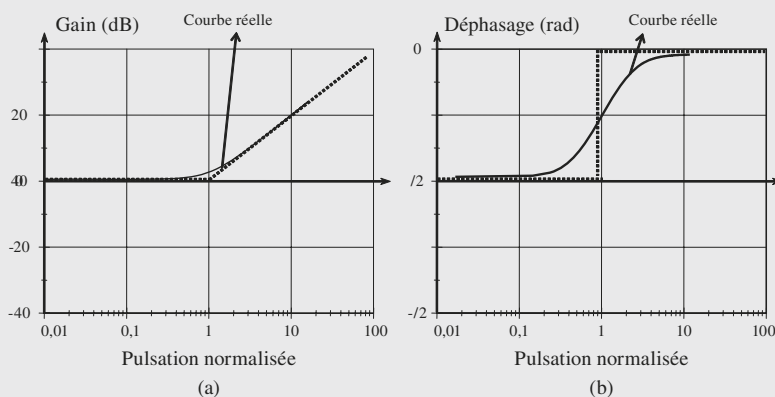


Figure 4.24 Courbes réelles et courbes asymptotiques du gain (a) et de la phase (b).

EXERCICES

Exercice 4.1 Tracés des diagrammes de Bode pour une fonction décomposable en fonctions simples

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 \times (3 + j\omega)}{(2 + j\omega) \times (2 + j\omega + j^2\omega^2)}$$

1. Représenter les diagrammes asymptotiques, puis tracer les courbes réelles du gain des fonctions suivantes :

$$H_1(j\omega) = (j\omega)^2, \quad H_2(j\omega) = 3 + j\omega, \quad H_3(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

et

$$H_4(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega + j^2\omega^2}$$

2. En déduire le diagramme asymptotique du gain de $H(j\omega)$. Tracer la courbe réelle.

Solution

1. Pour commencer, nous mettons sur l'axe des abscisses les points de cassure et nous calculons les pentes des asymptotes exprimées en dB par décade, les déphasages et les gains à l'origine lorsqu'ils existent :

	$H_1(j\omega)$	$H_2(j\omega)$	$H_3(j\omega)$	$H_4(j\omega)$
Point de cassure en rad/s	...	3	2	0,71
Pente en dB par décade	+40	+20	-20	-40
Déphasage en rad	$+\pi$	$+\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi$
Gain statique pour $\omega = 0$	...	$20 \log(3)$	$-20 \log(2)$	$-20 \log(2)$

Nous pouvons tracer alors directement le lieu asymptotique correspondant à chaque fonction.

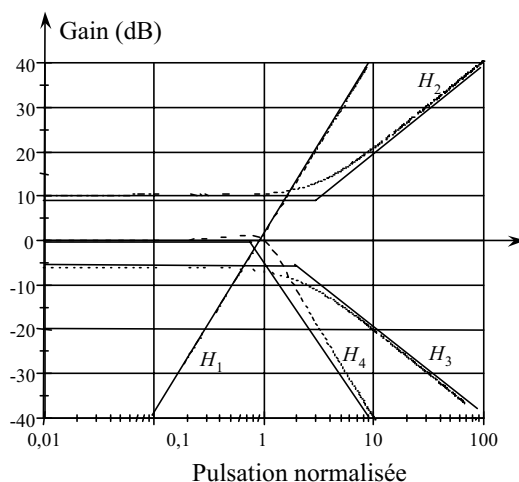


Figure 4.25 Courbes asymptotiques et courbes réelles du gain de H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .

Le lieu réel est obtenu à partir du lieu asymptotique en plaçant la courbe réelle par rapport à l'asymptote en adoptant les méthodes indiquées précédemment. En particulier pour les systèmes du second ordre, nous tiendrons compte de l'existence ou non de résonance en calculant le coefficient d'amortissement ($m = 0,5$ dans notre cas) et la pulsation de résonance qui en résulte (ici $\omega_R = \omega_0 \sqrt{2}/2$).

2. Nous pouvons maintenant tracer la somme des courbes asymptotiques, puis en déduire la courbe réelle du gain en fonction de la pulsation.

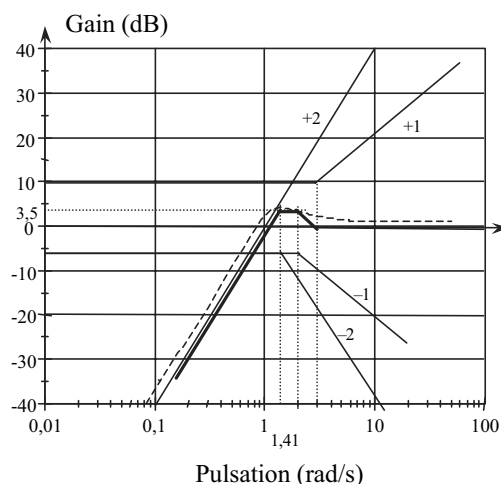


Figure 4.26 Courbe asymptotique et courbe réelle (---) du gain H .

Exercice 4.2 Tracés des diagrammes de Bode pour un filtre de Wienn

Soit le montage de la figure 4.27 représentant un filtre de Wienn.

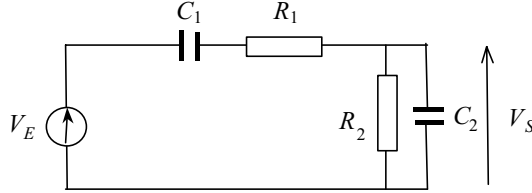


Figure 4.27 Filtre de Wienn passe-bande.

1. Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et montrer qu'elle se met sous cette forme :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}} \times \left(j\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)$$

Calculer ω_{01} , ω_{02} et ω_{03} .

2. Tracer les courbes de Bode pour le cas particulier suivant :

$$R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 = C = 1 \text{ nF}.$$

Solution

1. Calcul de la fonction de transfert : ce montage représente deux impédances qui peuvent être notées Z_1 et Z_2 . Pour calculer la fonction de transfert, il suffit d'appliquer le diviseur de tension :

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega} \quad \text{et} \quad Z_1 = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}{\frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{(1 + jR_2C_2\omega)}}{\frac{(1 + jR_1C_1\omega) \times (1 + jR_2C_2\omega) + jR_2C_1\omega}{(1 + jR_2C_2\omega) \times jC_1\omega}}$$

$$H(j\omega) = jR_2C_1\omega \times \frac{1}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega) + jR_2C_1\omega}$$

$$H(j\omega) = jR_2C_1\omega \times \frac{1}{1 + j(R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\omega - R_1C_1R_2C_2\omega^2}$$

Nous pouvons simplifier l'écriture de $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{03}} \times \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + j^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = j\frac{\omega}{\omega_{03}} \times \frac{1}{1 + 2jmx + j^2x^2}$$

Nous pouvons identifier l'expression de la fonction de transfert trouvée avec la fonction de transfert du résultat. Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + j^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_{01}} + \frac{\omega}{\omega_{02}}\right) + j^2\frac{\omega^2}{\omega_{01}\omega_{02}}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}; \quad \omega_{03} = \frac{1}{R_2C_1}; \quad \frac{2m}{\omega_0} = R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1$$

Par identification, nous pouvons déduire :

$$\frac{1}{\omega_{01}} + \frac{1}{\omega_{02}} = \frac{2m}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_{01}} \times \frac{1}{\omega_{02}} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

L'identification précédente donne le produit « P » et la somme « S » de l'équation :

$$Z^2 - SZ + P = 0 \quad \text{avec :} \quad z_1 = \frac{1}{\omega_1}, \quad z_2 = \frac{1}{\omega_2}$$

La résolution de l'équation de second degré précédente donne le déterminant :

$$\Delta = S^2 - 4P = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 = (z_1 - z_2)^2 > 0$$

Le déterminant étant toujours positif, les deux racines réelles sont telles que :

$$z_1 = m_1 = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad z_1 = m_2 = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Nous obtenons donc une fonction de transfert qui s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \times \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

2. Pour tracer les courbes de Bode dans le cas particulier suivant :

$$R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 = C = 1 \text{ nF}$$

Le déterminant devient :

$$\Delta = S^2 - 4P = (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) - 4(R_1C_1R_2C_2) = 5(RC)^2$$

Nous pouvons en déduire les pulsations caractéristiques :

$$z_1 = m_1 = \frac{3(RC) + \sqrt{5}(RC)}{2} \quad \text{soit :} \quad \omega_1 = \frac{1}{2,61RC}$$

$$z_2 = m_2 = \frac{3(RC) - \sqrt{5}(RC)}{2} \quad \text{soit :} \quad \omega_2 = \frac{1}{0,38RC}$$

Nous pouvons en déduire la pulsation caractéristique : $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 10^6$ (rad/s)

La fonction de transfert devient :

$$H(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \times \frac{1}{1 + j2,61\frac{\omega}{\omega_0}} \times \frac{1}{1 + j0,38\frac{\omega}{\omega_0}} = (1 + jx) \times \frac{1}{1 + j2,61x} \times \frac{1}{1 + j0,38x}$$

Nous pouvons tracer la somme des courbes asymptotiques de Bode et nous déduisons ensuite les courbes réelles.

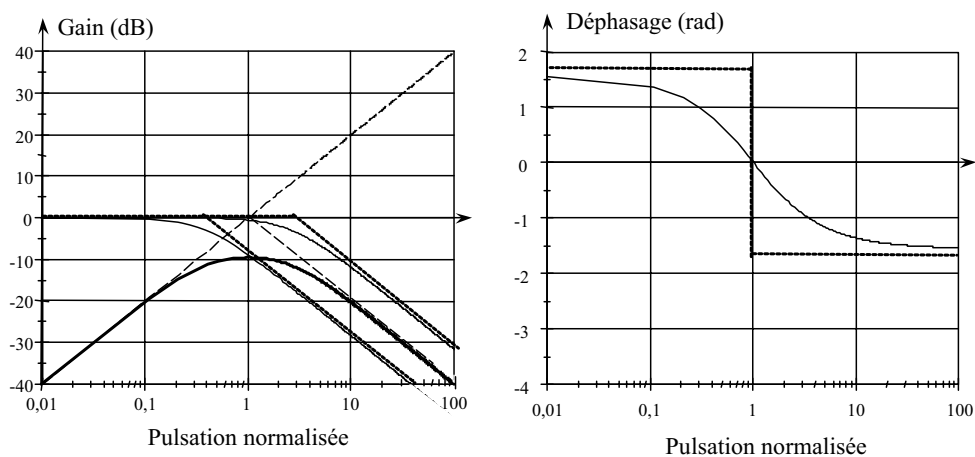


Figure 4.28 Courbes du gain (a) et de phase (b) en fonction de la pulsation.

Exercice 4.3 Étude d'un filtre à avance de phase

Soit le montage suivant qui sert souvent pour les systèmes automatiques et en électronique.

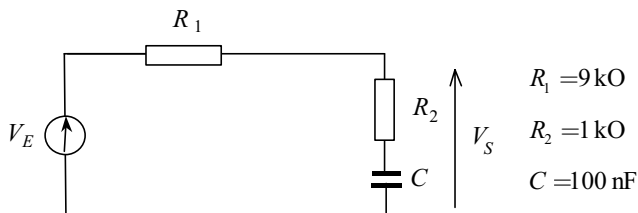


Figure 4.29 Filtre à avance de phase.

1. Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et montrer qu'elle se met sous cette forme :

$$H(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right) \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

Calculer ω_{01} et ω_{02} .

2. Tracer les courbes réelles de Bode.

Solution

1. Calcul de la fonction de transfert : le montage représente deux impédances que nous pouvons noter Z_1 et Z_2 . Pour calculer la fonction de transfert, il suffit d'appliquer le diviseur de tension :

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_1 = R_1$$

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega}}{\frac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega} + R_1} = \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j(R_2 + R_1)C\omega}$$

La fonction de transfert précédente $H(j\omega)$ se met sous la forme d'un produit de deux fonctions de transfert élémentaires : $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$:

$$H_1(j\omega) = 1 + jR_2C\omega \quad \text{et} \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jR_{\text{eq}}C\omega} \quad \text{avec :} \quad R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

$$H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}} \quad \text{et} \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_2C} \quad \text{et} \quad \omega_{02} = \frac{1}{R_{\text{eq}}C}.$$

2. Pour tracer les courbes de Bode, nous utilisons l'application numérique :

$$\omega_{01} = 10^4 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_{02} = 10^3 \text{ rad/s}.$$

La fonction de transfert représente le produit de H_1 et H_2 , nous pouvons tracer les courbes asymptotiques. Ensuite, nous traçons les courbes réelles du gain et de la phase (figure 4.30) en fonction de la fréquence.

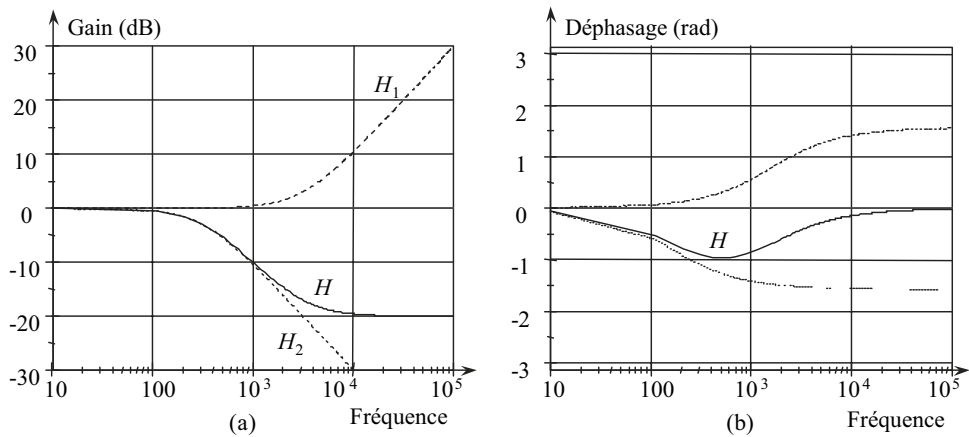


Figure 4.30 Courbes de gain (a) et de déphasage (b) en fonction de la pulsation.

Exercice 4.4 Étude d'une sonde passive

Le montage de cet exercice (Figure 4.31) représente le circuit électrique équivalent d'une sonde passive d'oscilloscope. En effet un oscilloscope présente à son entrée une impédance Z_2 constituée d'une résistance R_2 en parallèle avec un condensateur C_2 . La sonde représente une impédance constituée d'une résistance R_1 en parallèle avec un condensateur C_1 . La valeur de ce dernier peut être modifiée manuellement.

1. Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$H(j\omega) = K \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{01}} \right) \left(\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{02}}} \right)$$

Calculer ω_{01} et ω_{02} .

1. Tracer les courbes de Bode pour le cas particulier suivant :

le gain statique est K avec : $20 \log(K) = -10$ dB et $\omega_{02} = 10 \omega_{01} = 10$ rad/s

2. L'impédance d'entrée (R_2 , C_2) de l'oscilloscope avec son câble de raccordement est typiquement de : (1 M Ω , 100 pF).

Nous supposons : $R_1 C_1 = R_2 C_2$. Calculer les valeurs de R_1 et de C_1 pour avoir un rapport V_S sur V_E indépendant de la fréquence et égal à 0,1.

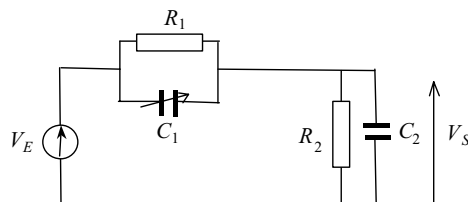


Figure 4.31 Circuit représentant une sonde passive.

Solution

1. Calcul de la fonction de transfert : ce montage représente deux impédances que nous notons Z_1 et Z_2 . Pour calculer la fonction de transfert, il suffit d'appliquer le diviseur de tension :

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega} \quad \text{et} \quad Z_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}{\frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}$$

$$H(j\omega) = \frac{R_2(1 + jR_1C_1\omega)}{R_1(1 + jR_2C_2\omega) + R_2(1 + jR_1C_1\omega)} = \frac{R_2(1 + jR_1C_1\omega)}{R_1 + jR_1R_2C_2\omega + R_2 + jR_2R_1C_1\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{R_2(1 + jR_1C_1\omega)}{R_1 + R_2 + jR_1R_2(C_1 + C_2)\omega}$$

Finalement nous trouvons :

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 + jR_1C_1\omega) \frac{1}{1 + j\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)(C_1 + C_2)\omega}$$

La fonction de transfert précédente $H(j\omega)$ se met sous la forme d'un produit de trois fonctions de transfert élémentaires : $H_0(j\omega)$, $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$

$$H_0(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad H_1(j\omega) = (1 + jR_1C_1\omega); \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jR_{\text{eq}}C_{\text{eq}}\omega}$$

$$H_0(j\omega) = K; \quad H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}; \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_1C_1} \quad \text{et} \quad \omega_{02} = \frac{1}{R_{\text{eq}}C_{\text{eq}}}$$

avec : $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}; \quad C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$

2. Tracés des courbes de Bode : nous sommes dans le cas : $\omega_{02} = 10\omega_{01}$. La fonction de transfert devient :

$$H(j\omega) = H_0(j\omega).H_1(j\omega).H_2(j\omega) = K \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}\right) \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{10\omega_{01}}}$$

Nous commençons par tracer les courbes asymptotiques. Ensuite, nous traçons les courbes réelles du gain et de la phase. Les figures 4.32 (a) et 4.32 (b) représente la courbe du gain et de la phase dans le cas particulier :

$$20 \log(K) = -10 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \omega_{02} = 10 \omega_{01} = 10 \text{ rad/s.}$$

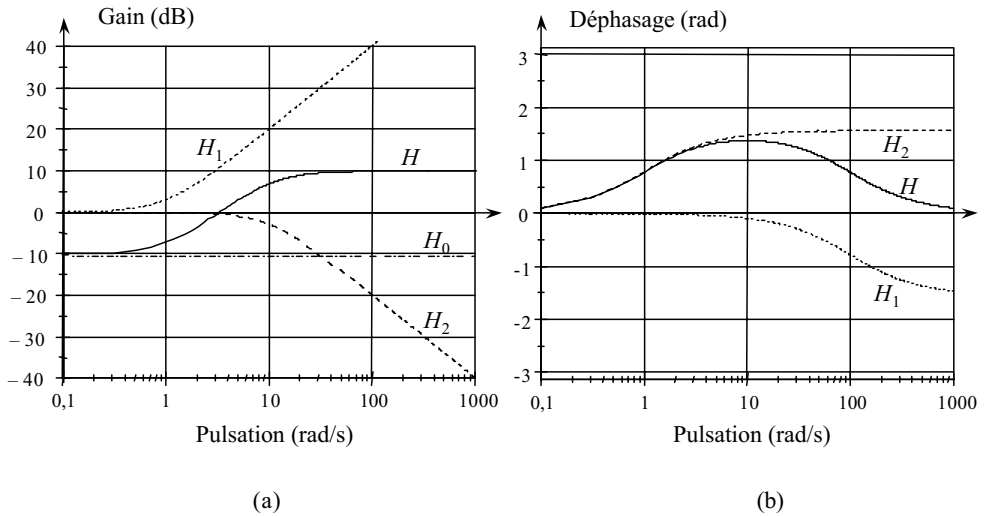


Figure 4.32 Courbes du gain (a) et de la phase (b) en fonction de la pulsation.

3. Nous prenons maintenant le cas particulier : $R_1 C_1 = R_2 C_2$:

$$R_{\text{eq}} C_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2) = \frac{R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 C_1 + R_1 R_1 C_1}{R_1 + R_2}$$

$$R_{\text{eq}} C_{\text{eq}} = \frac{R_1 C_1 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = R_1 C_1$$

soit : $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_{\text{eq}} C_{\text{eq}}}$

$$H(j\omega) = K \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-1} = K$$

Cette fonction de transfert étant un nombre réel positif indépendant de ω , les tensions de sortie et d'entrée sont en phase, et le rapport des amplitudes reste constant.

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_S}{V_E} \right| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{10} \Rightarrow R_1 = 9R_2 = 9 \text{ M}\Omega$$

Or, puisque : $R_2 C_2 = R_1 C_1$, nous en déduisons : $C_1 = C_2/9 = 11 \text{ pF}$.

L'avantage d'un tel dispositif est qu'il transforme l'impédance d'entrée d'un oscilloscope Z_2 en une impédance 10 fois plus élevée. Vis-à-vis du circuit électrique, l'oscilloscope absorbe maintenant 10 fois moins de courant (donc perturbe moins le circuit). La capacité vue par le circuit est la mise en série des deux condensateurs C_1 et C_2 . Sa valeur est réduite dans un rapport 10 par rapport à la capacité de l'oscilloscope seule. La sonde est dite « sonde passive un dixième ».

Exercice 4.5 Étude détaillée d'un circuit RLC série

Le montage de la figure 1 représente un circuit électrique RLC. Nous notons ω_0 la pulsation caractéristique du circuit et nous posons Q le coefficient de qualité du montage :

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

La valeur de la résistance peut être modifiée manuellement.

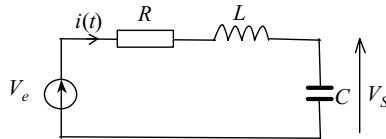


Figure 4.33 Circuit RLC série.

1. Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$.

2. Déterminer la valeur R_0 de la résistance R qui permet d'avoir un coefficient de surtension $m = 0,707$. Tracer les courbes du gain et du déphasage dans les cas suivants :

$$R = R_0, \quad R = R_1 = 4R_0 \quad \text{et} \quad R = R_2 = R_0/4.$$

Application numérique : $L = 100 \mu\text{H}$ et $C = 10 \text{ nF}$.

Solution

Le montage représente trois impédances en série qu'on peut noter Z_R , Z_L et Z_C . Pour calculer la fonction de transfert, il suffit d'appliquer le diviseur de tension :

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C}$$

avec : $Z_R = R$, $Z_L = jL\omega$ et $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega + (j^2LC\omega^2)} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

Nous reconnaitrons la fonction de transfert standard mise sous forme canonique :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + (j^2LC\omega^2)} = \frac{1}{(1 - x^2) + 2jmx}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

nous obtenons : $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$; $2jm\frac{\omega}{\omega_0} = jRC\omega$ soit : $m = \frac{RC\omega_0}{2}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Comme nous pouvons l'imaginer, la résistance R ne joue aucun rôle dans les comportements asymptotiques des réponses en gain et en phase.

Nous cherchons la valeur $R = R_0$ qui donne un coefficient de surtension : $m = 0,707$.

Nous avons :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{soit : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0}, \quad m = \frac{R_0 C \omega_0}{2} = \frac{1}{2Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit : } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nous pouvons en déduire la valeur de la résistance R_0 :

$$R_0 = \frac{\sqrt{2}}{C\omega_0} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{2 \times \frac{L}{C}} = \sqrt{2 \times \frac{10^{-4}}{10^{-8}}} = 141 \, \Omega$$

Nous notons : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et nous déterminons la fonction de transfert standard $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + 2jmx} = \frac{1}{1 - x^2 + \sqrt{2}jx}$$

Pour déterminer les courbes asymptotiques de Bode, nous calculons le module et l'argument de la fonction de transfert :

$$|H(j\omega)| = |H(jx)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \text{et} \quad \phi(\omega) = \phi(x) = -\text{Arctan}\left(\frac{2mx}{1 - x^2}\right)$$

$$|H(jx)| = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \right) = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + (2mx)^2 \right)$$

Lorsque x tend vers zéro, $|H(jx)|$ tend vers : $-10 \log(1) = 0 \text{ dB}$. La courbe asymptotique pour les très basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$) est une droite de pente 0 : l'asymptote est donc horizontale. L'argument de la fonction de transfert est $\phi = 0$. Il s'agit d'une asymptote elle aussi horizontale.

Lorsque x tend vers l'infini, le polynôme $(1 - x^2)^2 + (2mx)^2$ devient l'équivalent de x^4 . Le module de la fonction de transfert donne :

$$|H(jx)| \rightarrow -10 \log(x^4) = -40 \log(x).$$

Lorsque x passe d'une valeur à dix fois cette valeur, le gain varie de -40 dB . Il s'agit comme prévu d'une pente -2 ou de -40 dB/décade . Pour des valeurs de $x \gg 1$, la valeur de ϕ tend vers $-\pi$. Il s'agit d'une asymptote horizontale à $-\pi$.

• $R = R_0$, nous déterminons : $m = \frac{R_0 C \omega_0}{2} = \frac{1}{2Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans ce cas la courbe du gain (en dB) présente une réponse la plus plate possible (approximation méplate ou de Butterworth) :

$$|H(jx)| = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + (1,41x)^2 \right) \quad \text{et} \quad \phi = -\text{Arctan} \left(\frac{1,41x}{1 - x^2} \right)$$

- $R = 4R_0$, nous trouvons $m = \frac{4R_0C\omega_0}{2} = 2\sqrt{2}$.

Cette valeur est supérieure à 1, la fonction de transfert se met sous le produit de deux fonctions de premier ordre. Il convient donc de tracer à nouveau les courbes asymptotiques de Bode.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

avec : $\omega_1 = \omega_0 \left(m - \sqrt{m^2 - 1} \right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(m + \sqrt{m^2 - 1} \right)$

$$\omega_1 = \omega_0 \left(2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 1} \right) = 0,182 \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(2\sqrt{2} + \sqrt{8 - 1} \right) = 5,47 \omega_0$$

ce qui donne en valeur normalisée : $x_1 = 0,182$ et $x_2 = 5,47$.

$$|H(jx)| = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + (5,64x)^2 \right) \quad \text{et} \quad \phi = -\text{Arctan} \left(\frac{5,64x}{1 - x^2} \right)$$

- $R = \frac{R_0}{4}$, nous trouvons $m = \frac{R_0C\omega_0}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0,177$.

Cette valeur est inférieure à 0,707, nous en déduisons que le module de la fonction de transfert présente un rebond (un maximum).

$$|H(jx)| = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + (0,35x)^2 \right) \quad \text{et} \quad \phi = -\text{Arctan} \left(\frac{0,35x}{1 - x^2} \right)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,354jx + j^2x^2} \quad \text{donne : } x_{\text{Max}} = \sqrt{1 - 2m^2} \quad \text{et} \quad H_{\text{Max}} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

$$x_{\text{Max}} = \sqrt{1 - (2 \times 0,03132)} = 0,968 \quad \text{et} \quad H_{\text{Max}} = \frac{1}{0,354\sqrt{1 - 0,03132}} = 2,87$$

D'où : $H_{\text{Max}}(\text{dB}) = 20 \log(2,87) = 9,15 \text{ dB}$

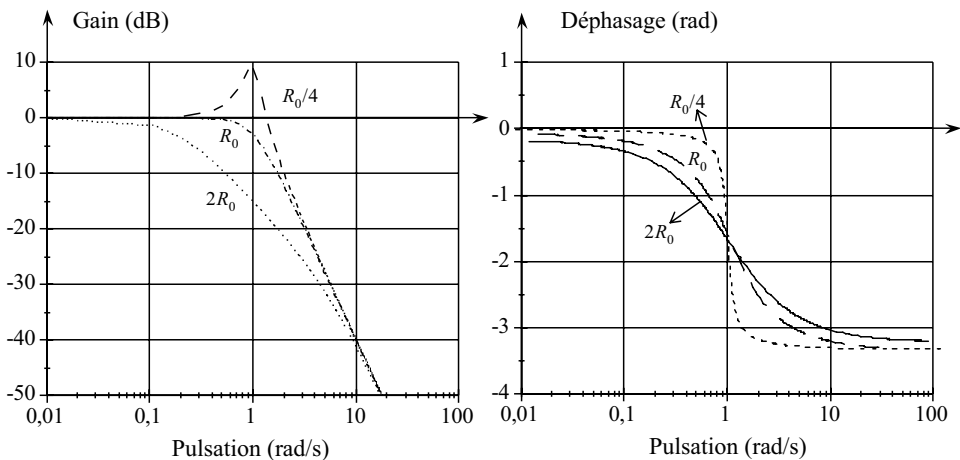


Figure 4.34 Courbes du gain (a) et du déphasage (b) en fonction de la pulsation.

Exercice 4.6 Application de la matrice $[Z]$ pour l'étude d'un quadripôle

Soit le quadripôle Q de la figure 4.35 caractérisé par sa matrice Z .

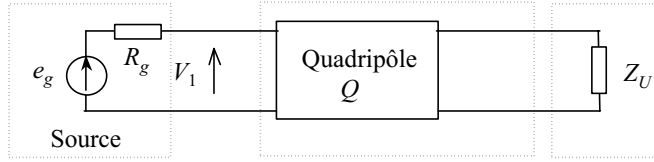


Figure 4.35 Quadripôle chargé avec Z_U .

1. Le quadripôle est attaqué par un générateur de tension sinusoïdale possédant une résistance interne R_g . Déterminer l'expression de l'impédance de sortie Z_S en fonction de R_g et des éléments Z_{ij} de la matrice.
2. Le quadripôle est relié à une impédance d'utilisation Z_U . Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée Z_e en fonction de Z_U et des éléments de la matrice.

Solution

1. Nous commençons par transformer le schéma du quadripôle en utilisant son modèle équivalent en fonction des paramètres Z . Nous appliquons ensuite la méthode qui consiste à passer le générateur de tension sinusoïdale (court-circuiter e_g tout en gardant R_g). L'impédance de sortie est donnée par : $Z_S = V_S/I_S$. L'étude des deux mailles de sortie et d'entrée donne (figure 4.36) :

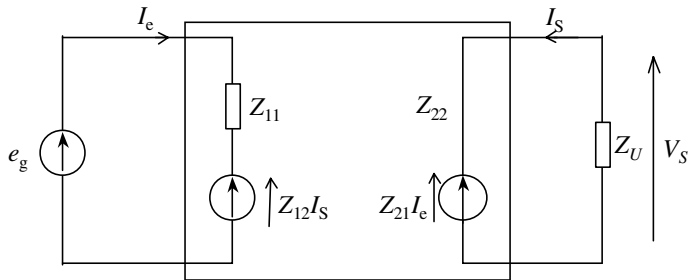


Figure 4.36 Quadripôle avec paramètres Z .

$$V_S = Z_{21}I_e + Z_{22}I_S \quad \text{et} \quad R_g I_e + Z_{11}I_e + Z_{12}I_S = 0$$

Nous calculons :

$$I_e = -\frac{Z_{12}}{R_g + Z_{11}}I_S \quad \text{et} \quad V_S = -\frac{Z_{12}Z_{21}}{R_g + Z_{11}}I_S + Z_{22}I_S$$

Nous en déduisons l'expression de l'impédance de sortie Z_S :

$$Z_S = \frac{V_S}{I_S} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{R_g + Z_{11}}$$

L'impédance de sortie d'un quadripôle dépend de la résistance (l'impédance) interne du générateur qui se trouve à l'entrée du quadripôle. Dans le cas particulier d'un quadripôle unidirectionnel, Z_{12} est nul et l'impédance de sortie devient Z_{22} .

2. Comme pour la première question, nous utilisons le schéma équivalent et nous débranchons le générateur d'entrée. Nous calculons l'impédance d'entrée : $Z_e = V_e / I_e$.

Or, l'étude des deux mailles d'entrée et de sortie donne :

$$V_e = Z_{11}I_e + Z_{12}I_s \quad \text{et} \quad Z_{21}I_e + Z_{22}I_s + Z_U I_s = 0$$

Nous calculons :

$$I_s = -\frac{Z_{21}}{Z_U + Z_{22}}I_e \quad \text{et} \quad V_e = Z_{11}I_e - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_U + Z_{22}}I_e$$

Nous en déduisons l'expression de l'impédance d'entrée :

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_U + Z_{22}}$$

L'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend de l'impédance d'utilisation (de charge) qui se trouve à la sortie du quadripôle. Dans le cas particulier d'un quadripôle unidirectionnel, Z_{12} est nul, l'impédance d'entrée devient Z_{11} .

Exercice 4.7 Étude d'un filtre en T

Soit un quadripôle passif défini par sa matrice $[Z]$.

1. Calculer la matrice de transfert $[T]$:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = T_{11} V_2 + T_{12} I_2 = A V_2 + B I_2 \\ I_1 = T_{21} V_2 + T_{22} I_2 = C V_2 + D I_2 \end{cases}$$

2. Le quadripôle précédent est un filtre en T. Calculer la matrice $[Z]$ et en déduire la matrice de transfert $[T]$.

3. Nous supposons que les admittances : $Y_A = Y_B = jC\omega$ et que l'impédance $Z_C = jL\omega$.

Trouver la condition sur l'impédance de charge Z_U pour que l'impédance vue à l'entrée du quadripôle chargé par Z_U soit égale à Z_U :

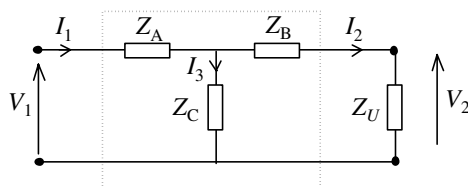


Figure 4.37 Quadripôle sous forme de T.

Solution

1. Pour calculer la matrice de transfert, nous pouvons procéder de la manière suivante : La deuxième équation de la matrice impédance permet de déduire l'expression de I_1 :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \text{ soit : } I_1 = \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$$

La première équation devient :

$$V_1 = Z_{11} \left(\frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \right) + Z_{12} I_2 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} V_2 + \left(Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} \right) I_2$$

Par identification, nous trouvons :

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}; \quad B = Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}}; \quad C = \frac{1}{Z_{21}}; \quad D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

2. Pour déterminer la matrice impédance $[Z]$, nous calculons :

$$\begin{cases} V_1 = (Z_A + Z_C) I_1 - Z_C I_2 \\ V_2 = Z_C I_1 - (Z_B + Z_C) I_2 \end{cases}$$

par identification, nous obtenons :

$$Z_{11} = Z_A + Z_C; \quad Z_{12} = -Z_C; \quad Z_{21} = Z_C; \quad Z_{22} = -(Z_B + Z_C)$$

Nous pouvons déduire la matrice de transfert par identification :

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C}; \quad B = Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} = -Z_C + \frac{(Z_A + Z_C)(Z_B + Z_C)}{Z_C}$$

$$B = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C}; \quad C = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{Z_C}; \quad D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} = \frac{Z_B + Z_C}{Z_C}$$

3. Pour calculer l'impédance itérative Z_U , nous utilisons la première équation de la matrice de transfert :

$$V_1 = A V_2 + B I_2 \quad \text{or : } V_2 = Z_U I_2 \quad \text{soit : } V_1 = A Z_U I_2 + B I_2$$

Nous avons aussi la deuxième équation :

$$I_1 = C V_2 + D I_2 \quad \text{or : } V_2 = Z_U I_2 \quad \text{soit : } I_1 = C Z_U I_2 + D I_2$$

par identification, nous obtenons :

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{A Z_U + B}{C Z_U + D} = Z_U$$

Il s'agit d'une équation de second degré :

$$C Z_U^2 + (D - A) Z_U - B = 0$$

Nous prenons le cas pratique qui nous intéresse :

$$A = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C}; \quad D = \frac{Z_A + Z_C}{Z_C}; \quad B = \frac{Z_A^2 + 2 Z_A Z_C}{Z_C}; \quad C = \frac{1}{Z_C}$$

L'équation de second degré précédente devient : $CZ_U^2 = B$ ce qui donne :

$$Z_U = \pm \sqrt{\frac{B}{C}} = \pm \sqrt{Z_A^2 + 2Z_A Z_C}$$

$$Z_U = \pm \sqrt{Z_A^2 + 2Z_A Z_C} = \pm Z_A \sqrt{1 + 2Z_C Y_A} = \pm \frac{1}{jC\omega} \times \sqrt{1 - 2LC\omega^2}$$

Nous remarquons que, selon la valeur de la pulsation ω , l'impédance Z_U peut être un imaginaire pur, autrement dit, l'impédance itérative est inductive ou capacitive. L'impédance Z_U peut aussi être strictement résistive.

Exercice 4.8 Etude d'une ligne à retard constitué de n quadripôles en T

Soit le montage d'une ligne à retard constitué de n quadripôles. Les valeurs instantanées des grandeurs d'entrée et de sortie de chaque quadripôle obéissent aux relations suivantes :

$$v_s(t) = v_e(t - \tau) \quad \text{et} \quad i_s(t) = i_e(t - \tau)$$

avec τ qui représente le temps de retard.

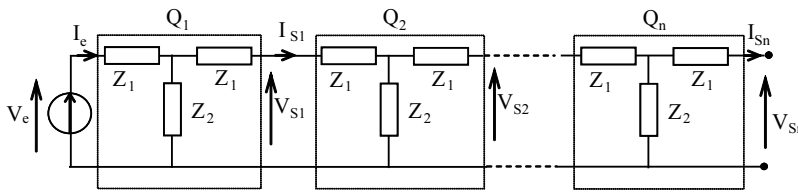


Figure 4.38 Ligne à retard à n quadripôles en T.

1. On prend le premier quadripôle en forme de T constitué de Z_1 , Z_2 et Z_1 . On suppose le régime sinusoïdal : $v_e(t) = V_e \cos(\omega t)$, donner les expressions de $v_s(t)$, $i_e(t)$ et $i_s(t)$. En déduire les grandeurs complexes $\underline{V_S}$ et $\underline{I_S}$.

Quelle est la condition sur l'impédance de charge pour vérifier la condition du retard τ .

2. On prend le cas général de la ligne à retard. Déterminer la condition réelle que doit satisfaire le montage précédent et qui permet d'écrire :

$$\frac{\underline{v_{S1}}}{\underline{v_{e1}}} = \frac{\underline{I_{S1}}}{\underline{I_{e1}}} = \frac{\underline{v_{S2}}}{\underline{v_{e2}}} = \frac{\underline{I_{S2}}}{\underline{I_{e2}}} = \dots = \frac{\underline{v_{Sn}}}{\underline{v_{S(n-1)}}}$$

Solution

1. Expression de $v_s(t)$, $i_e(t)$ et $i_s(t)$

Si la tension d'entrée est sinusoïdale, dans le cas général d'impédances quelconques, un déphasage ϕ s'établit entre la tension et le courant qui circule dans le circuit. On peut écrire :

$$v_e(t) = V_e \cos(\omega t), \quad i_e(t) = I_e \cos(\omega t - \phi)$$

Le temps de retard impose :

$$v_S(t) = V_e \cos(\omega t - \omega\tau) \quad \text{et} \quad i_S(t) = I_e \cos(\omega t - \phi - \omega\tau)$$

On peut utiliser les relations en notation complexe :

$$\underline{V}_S = \underline{V}_e e^{-j\omega\tau} \quad \text{et} \quad \underline{I}_S = \underline{I}_e e^{-j\omega\tau}$$

Ce qui donne aussi :

$$\frac{\underline{V}_S}{\underline{I}_S} = \frac{\underline{V}_e \times e^{-j\omega\tau}}{\underline{I}_e \times e^{-j\omega\tau}} = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e}$$

Avec :

$$\underline{V}_e = V_e e^{+j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{I}_e = I_e e^{+j(\omega t - \phi)}$$

Les relations de l'énoncé doivent être vérifiées quelle que soit la forme du signal d'entrée. Ceci n'est vrai que si le quadripôle est fermé sur son impédance caractéristique (itérative). En plus, cette impédance caractéristique doit être indépendante de la pulsation (résistive) et le déphasage doit être proportionnel en régime sinusoïdal à la pulsation ω .

La matrice Z du quadripôle en T est : $[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$

L'impédance caractéristique est déterminée par : $Z_0^2 = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

$$\text{Soit : } Z_0^2 = (Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2 = Z_1^2 + 2Z_1Z_2 + Z_2^2 - Z_2^2 = Z_1^2 + 2Z_1Z_2$$

L'impédance caractéristique doit être un réel : $Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} \in \Re$

2. Cas de la ligne à retard

Déterminons pour un quadripôle élémentaire en T le rapport du courant de sortie sur le courant d'entrée. Si nous utilisons le courant I_S entrant dans le quadripôle, on a :

$$\underline{V}_e = Z_1 \underline{I}_e + Z_2 (\underline{I}_e + \underline{I}_S) \quad \text{et} \quad \underline{V}_S = Z_2 (\underline{I}_e + \underline{I}_S) - Z_1 \underline{I}_S$$

Ce qui donne aussi : $\underline{V}_e - \underline{V}_S = Z_1 (\underline{I}_e + \underline{I}_S)$

$$\text{On peut donc écrire : } \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_S}{\underline{V}_e} = 1 - \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_e} = 1 - \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e} = \frac{Z_1 (\underline{I}_e + \underline{I}_S)}{(Z_1 + Z_2) \underline{I}_e - Z_2 \underline{I}_S}$$

On peut aussi mettre l'expression précédente sous la forme suivante :

$$1 - \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e} = 1 - x = \frac{Z_1 \left(1 + \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e}\right)}{(Z_1 + Z_2) - Z_2 \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e}} = \frac{Z_1 (1 + x)}{(Z_1 + Z_2) - Z_2 x} \quad \text{avec : } x = \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_e}$$

Ce qui revient à obtenir une équation de second degré : $x^2 - 2 \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} x + 1 = 0$

Or, on souhaite avoir : $x = e^{-j\omega\tau} = e^{-j\theta}$, il suffit donc de déterminer la valeur de θ telle que $e^{-j\theta}$ soit une solution de l'équation de second degré. On écrit de nouveau l'équation en remplaçant x par $e^{-j\theta}$ et on obtient :

$$e^{-2j\theta} - a e^{-j\theta} + 1 = 0 \quad \text{avec :} \quad a = 2 \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$$

On multiplie l'expression précédente par $e^{+j\theta}$ et on obtient : $e^{-j\theta} + e^{+j\theta} = a$. On en déduit :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

Or, la fonction *cosinus* est une fonction bornée, il vient alors :

$$-1 < \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) < 1.$$

Ce qui s'écrit aussi : $-2 < \frac{Z_1}{Z_2} < 0$.

Dans ce cas, la ligne à retard joue son rôle et retarde le signal d'un temps τ . Si la ligne contient n cellules (quadripôles), on a :

$$n \times \cos(\theta) = n \times \cos\left(\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}\right) = \omega\tau,$$

$$\text{soit : } \tau = \frac{n}{\omega} \times \cos(\theta) = n \times \cos\left(\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}\right)$$

Exercice 4.9 Matrices admittances des quadripôles en T, en T ponté et en double T

Soit le montage d'un quadripôle en T de la figure 4.39 (a).

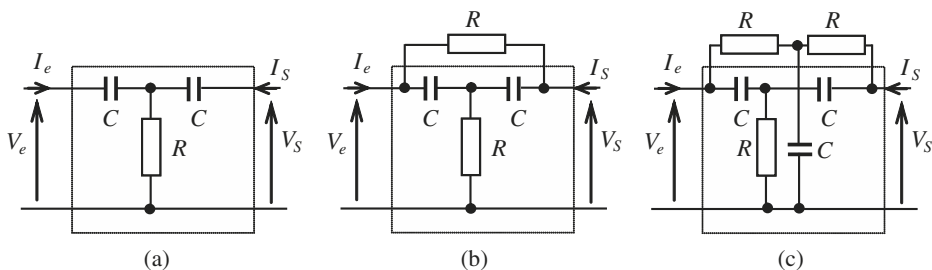


Figure 4.39 Quadripôle en T (a), en T ponté (b) et en double T (c).

1. Déterminer la matrice admittance du quadripôle de la figure (a).
2. En déduire la matrice admittance du montage (b) et (c).

Solution**1. Matrice Y du quadripôle en T**

On note respectivement Y_R et Y_C les admittances de la résistance et du condensateur :

$$Y_R = \frac{1}{R} \quad , \quad Y_C = \frac{1}{Z_C} = jC\omega$$

On commence par écrire les lois des mailles :

$$\begin{cases} V_e = Z_C I_e + Z_R (I_e + I_S) = (Z_C + Z_R) I_e + Z_R I_S \\ V_S = Z_C I_S + Z_R (I_e + I_S) = Z_R I_e + (Z_C + Z_R) I_S \end{cases}$$

On en déduit la matrice Z du quadripôle en T :

$$[Z_1] = \begin{bmatrix} (Z_C + Z_R) & Z_R \\ Z_R & (Z_C + Z_R) \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Z est :

$$DZ_1 = (Z_C + Z_R)^2 - Z_R^2 = Z_C^2 + 2Z_C Z_R$$

On utilise le tableau de la transformation d'une matrice Z en matrice Y :

$$[Y_1] = \frac{1}{DZ_1} \times \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_C^2 + 2Z_C Z_R} \times \begin{bmatrix} Z_C + Z_R & -Z_R \\ -Z_R & Z_C + Z_R \end{bmatrix}$$

$$[Y_1] = \frac{1}{\frac{1}{(jC\omega)^2} + 2\frac{R}{jC\omega}} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{jC\omega} + R & -R \\ -R & \frac{1}{jC\omega} + R \end{bmatrix}$$

$$[Y_1] = \frac{(jC\omega)^2}{1 + 2jRC\omega} \times \begin{bmatrix} \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} & -R \\ -R & \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} \end{bmatrix} = \frac{(jC\omega)}{1 + 2jRC\omega} \times \begin{bmatrix} 1 + jRC\omega & -jRC\omega \\ -jRC\omega & 1 + jRC\omega \end{bmatrix}$$

2. Matrice Y du quadripôle en T ponté et en double T **Cas du T ponté**

On utilise les résultats de la première question concernant le premier T formé par deux condensateurs et une résistance et on calcule la matrice admittance du quadripôle formé par la résistance R . Dans ce cas, la matrice admittance devient :

$$[Y_2] = \times \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne : $Y_{11} = Y_{22} = \frac{(jC\omega)(1+jRC\omega)}{1+2jRC\omega} + \frac{1}{R}$

Et : $Y_{12} = Y_{21} = -\frac{(jRC\omega)(jC\omega)}{1+2jRC\omega} - \frac{1}{R}$

Cas du double T

On utilise les résultats de la première question concernant le premier quadripôle en T formé par deux condensateurs et une résistance et on calcule la matrice concernant le deuxième quadripôle en T composé par deux résistances et un condensateur.

On commence par écrire les lois des mailles :

$$\begin{cases} V_e = Z_R I_e + Z_C (I_e + I_S) = (Z_R + Z_C) I_e + Z_C I_S \\ V_S = Z_R I_S + Z_C (I_e + I_S) = Z_C I_e + (Z_R + Z_C) I_S \end{cases}$$

On en déduit la matrice Z_2 du quadripôle Q_2 en T : $[Z_2] = \begin{bmatrix} (Z_R + Z_C) & Z_C \\ Z_C & (Z_R + Z_C) \end{bmatrix}$

Le déterminant de la matrice Z est :

$$DZ_2 = (Z_R + Z_C)^2 - Z_C^2 = Z_R^2 + 2Z_C Z_R = R^2 + 2\frac{R}{jC\omega}$$

On utilise le tableau de la transformation d'une matrice Z en matrice Y :

$$[Y_2] = \frac{1}{DZ_2} \times \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + 2\frac{R}{jC\omega}} \times \begin{bmatrix} R + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} \\ -\frac{1}{jC\omega} & R + \frac{1}{jC\omega} \end{bmatrix}$$

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} \frac{1+jRC\omega}{jC\omega} \times \frac{(jC\omega)}{R(2+jRC\omega)} & -\frac{1}{R(2+jRC\omega)} \\ -\frac{1}{R(2+jRC\omega)} & \frac{1+jRC\omega}{jC\omega} \times \frac{(jC\omega)}{R(2+jRC\omega)} \end{bmatrix}$$

$$[Y_2] = \frac{1}{R(2+jRC\omega)} \times \begin{bmatrix} 1+jRC\omega & -1 \\ -1 & 1+jRC\omega \end{bmatrix}$$

On connaît la matrice Y_1 : $[Y_1] = \frac{(jC\omega)}{1+2jRC\omega} \times \begin{bmatrix} 1+jRC\omega & -jRC\omega \\ -jRC\omega & 1+jRC\omega \end{bmatrix}$

La matrice totale est formée par la somme des deux matrices Y_1 et Y_2 :

$$[Y_{\text{Totale}}] = [Y_1] + [Y_2]$$

On trouve :

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{(jC\omega)(1+jRC\omega)}{1+2jRC\omega} + \frac{(1+jRC\omega)}{R(2+jRC\omega)}$$

Et :

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{(jRC\omega)(jC\omega)}{1+2jRC\omega} - \frac{1}{R(2+jRC\omega)}$$

Chapitre 5

Les réseaux linéaires en régime quelconque

Dans un réseau constitué de dipôles passifs linéaires soumis à un régime de commande quelconque $e(t)$, qui représente soit une tension $v(t)$ soit un courant $i(t)$, les équations d'états du réseau sont des équations différentielles, c'est à dire faisant intervenir les dérivés des grandeurs électriques. La relation qui relie la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$ est :

$$a_0 s(t) + a_1 s'(t) + a_2 s''(t) + \dots + a_n s^n(t) = k e(t)$$

En effet pour une résistance R , un condensateur C et une inductance L nous avons respectivement les relations qui lient la tension au courant :

$$u(t) = R.i(t); \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}; \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Si a_n est différent de zéro, le système est dit d'ordre n .

La première partie de l'équation ($a_0 s(t) + a_1 s'(t) + a_2 s''(t) + \dots + a_n s^n(t)$) constitue le premier membre et la deuxième partie ($k.e(t)$) le second membre. Le second membre est donc lié à la présence du générateur de commande. Nous allons étudier uniquement les équations différentielles à coefficients constants.

5.1 RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour résoudre une équation différentielle à coefficients constants, nous pouvons montrer en analyse mathématique qu'il faut trouver deux solutions :

- Solution générale $s_1(t)$ de l'équation sans second membre : le résultat obtenu est appelé régime libre. Il correspond en fait à la réaction spécifique du système lorsque le temps devient trop grand (le temps tend vers l'infini). Ceci revient à dire que le système fonctionne en régime permanent indépendamment du début de l'excitation appliquée au circuit.
- Solution particulière $s_2(t)$ de l'équation avec second membre : ce qui revient à dire que cette solution, qui dépend de l'excitation, correspond au régime établi final. La solution obtenue est appelée aussi régime forcé.

Le résultat est la somme de ces deux solutions : $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

Ensuite il reste à déterminer les valeurs des constantes d'intégration obtenues avec la solution générale. Elles sont en général fixées par les conditions initiales de l'expérience. En effet, les entrées ne sont pas nécessairement nulles à l'instant initial. Il faut assurer la continuité des grandeurs physiques.

Pour résoudre une équation différentielle quelconque, nous dérivons souvent l'équation pour faire disparaître les intégrales, ce qui a comme effet néfaste, de faire disparaître aussi les constantes $u(0^+)$ ou $i(0^+)$ qui constituent les conditions initiales du réseau (courants dans les inductances et tensions aux bornes des condensateurs). Nous appliquons ensuite les méthodes mathématiques de résolution tout en tenant compte des conditions initiales.

5.1.1 Réponse d'un circuit de premier ordre

Prenons le cas d'un circuit électrique régi par une équation différentielle de premier ordre, avec $e(t)$ l'excitation d'entrée (tension ou courant) :

$$s(t) + \tau s'(t) = Ke(t) \quad \text{ou} \quad s(t) + \tau \times \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

où τ est la constante du temps du système, et K le gain statique (gain obtenu en régime permanent).

a) Solution de l'équation sans second membre

Pour trouver la solution $s_1(t)$ de l'équation sans second membre, nous résolvons :

$$s(t) + \tau s'(t) = 0 \quad \text{soit :} \quad s(t) + \tau \times \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{s(t)}{\tau}$$

ce qui donne :

$$\int \frac{ds(t)}{s(t)} = - \int \frac{dt}{\tau}$$

La solution de l'équation précédente est : $s_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. A est une constante.

b) Solution particulière

Pour trouver la solution particulière $s_2(t)$ de l'équation, il suffit de prendre la solution qui correspond au régime permanent :

$$\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) + 0 = Ke(t)$$

ce qui permet de déduire :

$$s_2(t) = Ke(t)$$

5.1.2 Exemple de la charge d'un condensateur

Nous cherchons à calculer en fonction du temps, la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du condensateur si $e(t)$ est un échelon unitaire de tension d'amplitude E . Nous supposons que :

$e(t) = E$ pour $t \geq 0$ et $e(t) = 0$ pour $t < 0$

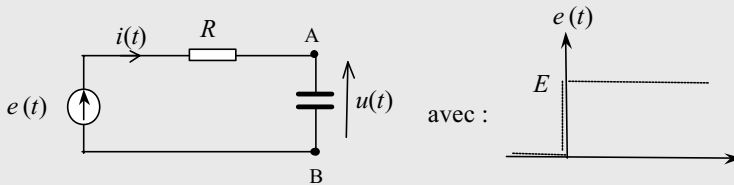


Figure 5.1 Exemple d'un circuit RC.

L'équation de la maille donne : $e(t) = u(t) + R i(t)$

avec : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ ce qui donne :

$$e(t) = RC \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

La recherche de la solution se fait de la façon suivante.

a) Solution générale sans second membre

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

d'où :

$$u(t) = A \times e^{-\frac{t}{RC}} = A \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A étant une constante d'intégration et τ la constante de temps exprimée en seconde.

b) Solution particulière

Elle est de la même forme que l'excitation $e(t)$. En effet, $e(t)$ est une tension constante pour tout instant $t > 0$. Nous pouvons obtenir le résultat directement puisque la dérivée d'une constante est nulle : $u(t) = e(t) = E$.

c) *Solution finale*

En reportant les résultats trouvés dans l'équation initiale, cela donne :

$$u(t) = E + A \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

la constante A dépend des conditions initiales.



Remarque : La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brusquement, sinon l'intensité du courant devient infinie. Or, en général il y a toujours une résistance (résistance de fuite ou externe) dans le circuit qui limite l'intensité du courant.

De même, en utilisant un raisonnement analogue, le courant dans une inductance ne peut pas varier brusquement.

Dans le cas de notre exemple : $u(t) = 0$ pour $t < 0$, puisqu'il n'y a pas de variation brusque de tension aux bornes du condensateur C , il advient que $u(t = 0^+) = 0$. Or d'après le résultat précédent, nous savons que : $u(t = 0) = E + A$ d'où $A = -E$. La solution complète devient :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Connaissant $u(t)$, il est alors facile de trouver le courant $i(t)$ et de déduire la tension aux bornes de la résistance R .

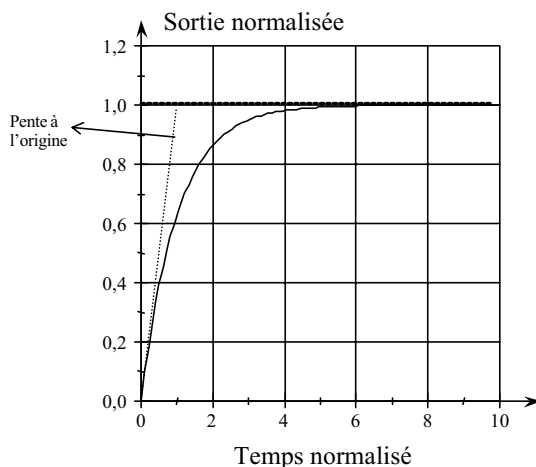


Figure 5.2 Courbe normalisée de la charge d'un condensateur.

Le résultat précédent permet de tirer les remarques suivantes :

- La tension de sortie est une fonction du temps qui est entièrement déterminée par le produit RC , appelée constante de temps du circuit et notée souvent τ .
- Lorsque $t \ll RC$, en notant $x = t/RC$ et en développant l'exponentielle en série limitée, nous trouvons, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux

de la série :

$$u(t) = E \times \left[1 - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \right] \approx Ex = E \frac{t}{RC}$$

- La tension de sortie augmente donc d'abord linéairement, c'est-à-dire comme si elle devait atteindre la tension finale après un temps RC . Il s'agit de *la tangente à l'origine*. Ensuite, la tension augmente lentement pour atteindre après un temps infini un niveau constant, égal à la tension appliquée.
- Nous pouvons calculer le temps de montée t_m (*rise time*) qui est le temps que met la sortie pour passer de 10 % à 90 % de sa valeur en régime permanent.

La sortie en régime permanent (lorsque t tend vers l'infini) vaut :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \approx E$$

La sortie atteint 10 % de sa valeur finale à l'instant t_1 et 90 % à l'instant t_2 .

- $0,1E = E \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right)$ soit : $0,9 = e^{-\frac{t_1}{RC}}$;
- $0,9E = E \left(1 - e^{-\frac{t_2}{RC}} \right)$ soit : $0,1 = e^{-\frac{t_2}{RC}}$;

Nous déduisons :

$$t_m = t_2 - t_1 \approx 2,2RC = 2,2\tau$$

5.1.3 Exemple de la décharge d'un condensateur

Supposons maintenant qu'après un certain temps t_d , l'entrée $e(t)$ passe de sa valeur finale qui est pratiquement la valeur E , à 0 V, ce qui revient à considérer que $e(t)$ constitue une impulsion. Étudions de la même façon, le cas de la décharge du condensateur. Nous supposons que $t_d \gg RC$.

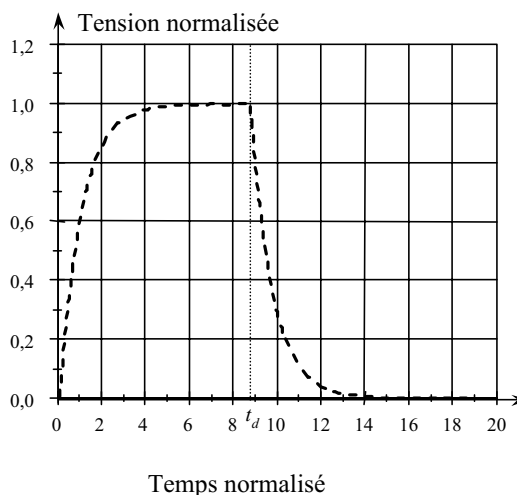


Figure 5.3 Courbe normalisée de la charge et de la décharge d'un condensateur.

Le condensateur se décharge dans la résistance R jusqu'à ce que la tension à ses bornes soit de nouveau nulle.

Pour résoudre l'équation différentielle, nous procédons comme nous l'avons fait pour le cas de la charge du condensateur. La seule différence consiste à envoyer un échelon de tension $-E$. Nous trouvons en prenant comme origine des temps, l'origine de l'impulsion :

$$u(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{RC}}\right) \times e^{\frac{t-t_d}{RC}}$$

La tension $u(t)$ correspondant à la charge et à la décharge du condensateur est représentée par la courbe de la figure 5.3. Nous avons résumé dans le tableau 1, les principaux résultats concernant la charge et la décharge d'un condensateur. L'unité du temps est prise volontairement égale à la constante de temps, ce qui permet d'utiliser ce tableau pour n'importe quel couple RC .

Tableau 5.1 Tableau récapitulatif de l'évolution en fonction du temps de la tension et du courant pour la charge et la décharge d'un condensateur

Temps (unité : RC)	Variation de $u(t)$ en % (charge du condensateur)	Variation de $u(t)$ en % (décharge du condensateur)
0	0	100
0,2	18,1	81,9
0,5	39,4	60,6
1	63,2	36,8
2	86,5	13,5
3	95	5
4	98,2	1,8
5	99,3	0,7
7	99,9	0,1

Discuter du cas $RC \gg t_d$

Nous avons supposé jusqu'ici que la durée de l'impulsion est très supérieure à la constante de temps RC du circuit. Si nous prenons maintenant le cas inverse, la décharge du condensateur commence avant que la tension aux bornes du condensateur soit égale à la tension appliquée. Le passage de 0 V à $+E$ et inversement revient à supposer deux échelons d'amplitude $+E$ et $-E$ séparés par la durée t_d . Nous avons montré que pour des instants faibles devant la constante du temps $\tau = RC$, en utilisant le développement limité, $u(t)$ devient pratiquement égale à :

$$u(t) = E \frac{t}{RC}$$

ce qui donne pour $t = t_d$:

$$u(t) = E \frac{t_d}{RC}$$

L'évolution exponentielle est confondue avec la tangente à l'origine. Le condensateur se charge proportionnellement à E pendant le temps t_d . La tension aux bornes

du condensateur est proportionnelle à l'aire du signal d'entrée. Il s'agit d'une intégration d'où le nom de *circuit intégrateur* donné à ce montage (même si la condition d'intégration n'est pas toujours réalisée).

Lorsque nous désirons intégrer un signal, nous pouvons donc utiliser un circuit RC avec une grande constante de temps, par exemple $RC > 10 t_d$. Mais l'emploi de ces circuits fournit un signal de sortie de faible amplitude qui nécessite une amplification. L'emploi des amplificateurs opérationnels (chapitre 6) permet d'obtenir des intégrateurs de bonne qualité.

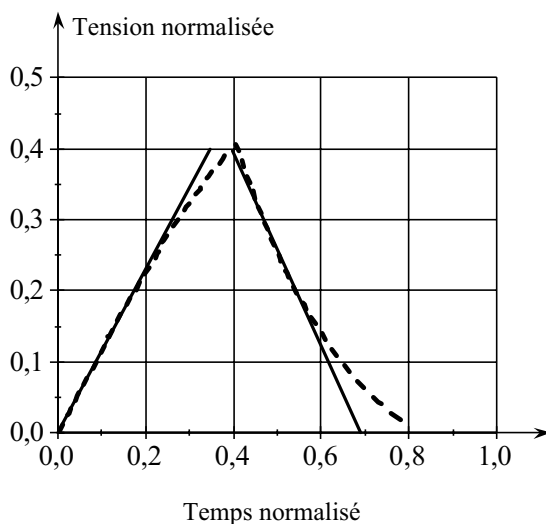


Figure 5.4 Montage intégrateur : charge et décharge d'un condensateur lorsque $RC \gg t_d$.

5.1.4 Réponse d'un circuit de second ordre

Prenons le cas d'un circuit électrique, dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle de second ordre, en supposant l'entrée $e(t)$ une excitation quelconque qui correspond à une tension ou à un courant.

L'équation différentielle peut s'écrire sous la forme standard :

$$\omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 s'(t) + s''(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

ou

$$\omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = K\omega_0^2 e(t)$$

où m est le coefficient d'amortissement,

ω_0 la pulsation propre du système non amorti,

K le gain statique obtenu pour des pulsations très faibles devant ω_0 .

L'étude de l'équation différentielle montre que la solution peut se mettre sous la forme de la somme de deux solutions :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

- $s_1(t)$ représente la solution générale de l'équation sans second membre. Cette solution correspond au régime transitoire du fonctionnement ;
- $s_2(t)$ représente la solution particulière de l'équation avec second membre. Cette solution correspond au régime permanent.

La réponse d'un système de second ordre en régime permanent (régime sinusoïdal forcé) a été vu au chapitre 4. L'étude du régime transitoire se fait en étudiant :

$$\omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 s'(t) + s''(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0$$

La solution de ce type d'équation s'écrit sous la forme : $s_1(t) = Ae^{-\omega t}$.

Nous dérivons l'équation deux fois de suite, nous trouvons :

$$Ae^{-\omega t} (\omega^2 - 2m\omega_0\omega + \omega_0^2) = 0$$

Il suffit donc de résoudre une équation différentielle d'ordre 2 :

$$\omega^2 - 2m\omega_0\omega + \omega_0^2 = 0$$

La solution donne :

$$\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$$

Nous retrouvons, comme pour l'étude harmonique, quatre régimes de fonctionnement :

- $m > 1$, c'est le régime apériodique (amorti) ;
- $m < 1$, c'est le régime oscillatoire amorti ;
- $m = 1$, c'est le régime critique ;
- $m = 0$, c'est le régime oscillatoire pur.

L'étude de telles fonctions pour déterminer les réponses indicielles et les réponses impulsionnelles en fonction de la valeur de m devient difficile. Il serait préférable d'utiliser la transformée inverse de Laplace. Néanmoins, nous étudierons, dans l'exemple qui suit, la résolution d'une équation de second degré sans utiliser la transformée de Laplace .

5.1.5 Étude d'un circuit *RLC* série

Nous cherchons à calculer en fonction du temps, la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes de la résistance R , si le circuit fonctionne en régime libre. Ce régime, qui donne la solution de l'équation sans second membre, permet de trouver toutes les réponses, notamment la réponse indicielle et la réponse impulsionnelle. Nous supposons que la tension de sortie à l'instant $t = 0$ est : $u(0) = u_C(0) = 0$.

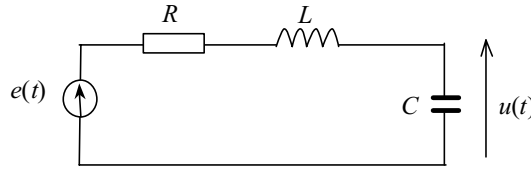


Figure 5.5 Exemple d'un circuit RLC.

L'équation de la maille donne :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

La grandeur commune aux trois éléments du circuit est le courant $i(t)$. L'équation de la maille devient :

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\theta) d\theta = e(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

En dérivant par rapport au temps, nous mettons en évidence la grandeur qui nous intéresse, c'est-à-dire le courant $i(t)$, nous obtenons :

$$R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$Ri' + Li'' + \frac{1}{C}i(t) = e'(t)$$

$$\text{soit : } \frac{1}{LC}i(t) + \frac{R}{L}i'(t) + i''(t) = \frac{1}{L}e'(t)$$

Nous avons obtenu une équation qui se met sous la forme standard :

$$\frac{1}{LC}i(t) + \frac{R}{L}i'(t) + i''(t) = \omega_0^2 i(t) + 2m\omega_0 i'(t) + i''(t) = \frac{1}{L}e'(t)$$

Par identification, nous obtenons les paramètres suivants à savoir, la pulsation, la fréquence et la période propre du système :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 est la pulsation propre du circuit et f_0 est sa fréquence propre.



La fréquence f_0 caractérise le régime sinusoïdal. Le terme m , vu auparavant, est le coefficient d'amortissement qui caractérise la forme de la réponse du système.

Nous pouvons définir le facteur de qualité Q tel que :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Pour résoudre l'équation : $\omega_0^2 i(t) + 2m\omega_0 i'(t) + i''(t) = 0$, nous calculons le discriminant réduit de cette équation : $\Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1)$. Les racines de l'équation sont les complexes notés p_1 et p_2 .

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

La solution de l'équation précédente est une combinaison linéaire qui s'écrit :

$$s_1(t) = \sum_{i=0}^2 A_i e^{p_i t},$$

soit :

$$s_1(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{(-m\omega_0 + j\omega_a)t} + A_2 e^{(-m\omega_0 - j\omega_a)t}$$

$$s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} (A_1 e^{j\omega_a t} + A_2 e^{-j\omega_a t})$$

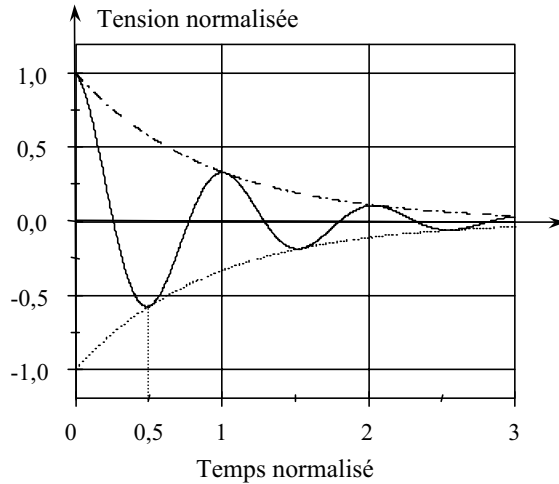


Figure 5.6 Réponse libre d'un circuit RLC : cas du régime oscillatoire amorti.

Nous avons vu que, pour $m < 1$, le système fonctionne en régime oscillatoire amorti. Nous définissons une pseudo-période T_a qui correspond à l'intervalle de temps séparant deux maximums ou deux minimums successifs :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \quad \text{soit :} \quad \omega_a = \omega_0\sqrt{1-m^2}$$

et :

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{2\pi} = f_0\sqrt{1-m^2}$$

Le terme entre parenthèses de $s_1(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un cosinus ou d'un sinus. Il résulte :

$$s_1(t) = A e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

avec : $\varphi = \text{Arctan} \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

Si nous notons la quantité : $\alpha = m\omega_0$, qui est homogène à une pulsation ou à l'inverse du temps, la solution précédente devient :

$$s_1(t) = Ae^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_a t + \varphi) = Ae^{-\alpha t} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - m^2} + \varphi\right)$$

$s_1(t)$ est une courbe sinusoïdale amortie, qui est enveloppée par deux exponentielles d'équation : $\pm Ae^{-\alpha t}$.

Les points de contact de $s_1(t)$ avec l'enveloppe d'équation : $+Ae^{-\alpha t}$ correspondent à $+1$ du cosinus. Les points de contact de $s_1(t)$ avec l'enveloppe d'équation : $-Ae^{-\alpha t}$ correspondent à -1 du cosinus.

L'instant de l'apparition du premier maximum est :

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}} = \frac{T_a}{2}$$

$s(t)$ correspond à une tension ou à un courant. Un exemple de représentation de la tension en fonction du temps est donné à la figure 5.6, en prenant le cas particulier d'un coefficient $m = 0,2$.

5.2 UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Les équations des réseaux peuvent se résoudre par la méthode classique de résolution des équations intégral-différentielles, mais cette méthode est assez lourde à utiliser. Il vaut mieux alors faire appel à la transformation de Laplace qui présente l'intérêt majeur de conserver les conditions initiales tout au long de la résolution du problème. Cette méthode est quelquefois appelée méthode opérationnelle ou *calcul opérationnel*.

5.2.1 Définition

La transformation de Laplace fait correspondre à une fonction $f(t)$ de la variable réelle temps t , une fonction $F(p)$ de la variable complexe p définie par :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec} \quad p = \sigma + j\omega$$

En analyse des systèmes, la variable réelle est bien souvent le temps t . Pour assurer la convergence de l'intégrale, la fonction $f(t)$ doit être bornée dans tout intervalle fini ; il doit exister un réel a tel que $|f(t)|e^{-at}$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Par la suite, toutes les fonctions $f(t)$ que nous étudierons, satisferont aux conditions des convergences des intégrales.

Souvent, les notations suivantes sont les plus utilisées :

$$L[f(t)] = F(p) \quad \text{et} \quad L^{-1}[F(p)] = f(t)$$

5.2.2 Propriétés de la transformée de Laplace

a) Linéarité

La transformée de Laplace est une transformation linéaire.

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \text{ nous avons : } L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$$

La démonstration découle directement des propriétés des intégrales.

b) Changement de l'échelle des temps

Cherchons la transformée de Laplace de la fonction : $f(kt)$.

$$\text{Par définition, nous avons : } L[f(kt)] = \int_0^\infty f(kt) \times e^{-pt} dt$$

$$L[f(kt)] = \frac{1}{k} \int_0^\infty f(kt) \times e^{-\frac{p}{k} \times kt} d(kt)$$

Si nous supposons $k > 0$, nous posons : $u = kt$, ce qui donne :

$$L[f(kt)] = \frac{1}{k} \int_0^\infty f(u) \times e^{-\frac{1}{k} \times pu} du$$

a est supposé positif, nous reconnaissons l'intégrale comme étant la transformée de Laplace : $F(p/k)$.

$$L[f(kt)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

c) Dérivation

Nous voulons déterminer la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$: $L[f'(t)]$

$$L[f'(t)] = L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = pL[f(t)] - f(0^+)$$

Si nous posons : $u = f(t)$ et $v = \frac{1}{p}e^{-pt}$, nous aurons $dv = e^{-pt} dt$

$$L[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_{0^+}^\infty u dv$$

La transformée de Laplace de $f(t)$ est :

$$F(p) = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}f(t)\right]_{0^+}^\infty + \frac{1}{p} \int_{0^+}^\infty f'(t)e^{-pt} dt$$

$$F(p) = \frac{f(0^+)}{p} + \frac{1}{p} \int_{0^+}^\infty f'(t)e^{-pt} dt$$

ce qui donne :

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$$

La dérivation par rapport au temps se traduit sur la transformée par une multiplication par p et par le retrait de la limite lorsque le temps tend vers 0^+ .

d) Intégration

Nous déterminons la transformée de Laplace de l'intégrale de $f(t)$: $L \left[\int_0^t f'(t) dt \right]$

Si nous posons : $u = e^{-pt}$ et $v = \int_0^t f(t) dt$, la transformée de $f(t)$ est :

$$L[f(t)] = F(p) = \left[e^{-pt} \int_0^t f(t) dt \right]_{0^+}^{\infty} + \frac{1}{p} \int_{0^+}^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt$$

$$\text{soit : } L \left[\int_{0^+}^t f(t) dt \right] = \frac{1}{p} L[f(t)]$$

L'intégration par rapport à la variable temps t , se traduit sur la transformée de Laplace par une division par p .

5.2.3 Théorèmes des valeurs initiale et finale

a) Théorème de la valeur initiale

Le théorème de la valeur initiale s'énonce :

$$\text{Si } F(p) = L[f(t)], \quad \text{alors } \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0^+).$$

Nous utilisons le théorème de la dérivation :

$$\int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0^+)$$

$$\text{Or, } \lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0^+)] = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt$$

puisque l'intégration se fait par rapport au temps, nous pouvons écrire :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f'(t) \lim_{p \rightarrow \infty} [e^{-pt}] dt$$

Or, $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-pt} = 0$, nous obtenons donc :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

b) Théorème de la valeur finale

Le théorème de la valeur finale stipule que :

Si $F(p) = L[f(t)]$ et si les pôles de $pF(p)$, c'est-à-dire les zéros de son dénominateur, appartiennent strictement au demi-plan des réels négatifs :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$$

Nous utilisons le théorème de la dérivation : $\int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) = f(0^+)$

$$\text{Or : } \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(0^+)] = \int_{0^+}^{\infty} f'(t) \lim_{p \rightarrow 0} [e^{-pt}] dt = \int_{0^+}^{\infty} f'(t) dt$$

$$\text{et : } \int_{0^+}^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$$

$$\text{Il vient : } \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(0^+)] = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$$

$$\text{soit : } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

5.2.4 Autres théorèmes

a) Translation dans le domaine complexe

Considérons une fonction quelconque $f(t)$ dont la transformée de Laplace est notée $F(p)$. Si nous appliquons une translation complexe notée : $F(p+a) = G(p)$, nous obtenons :

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t).e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} g(t).e^{-(p+a)t}.e^{at} dt$$

$$\text{Or : } F(p+a) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-(p+a)t} dt = G(p)$$

$$\text{d'où : } L[e^{-at} f(t)] = F[p+a] \quad \text{ou bien : } g(t) = e^{-at} f(t)$$

Une translation de « a » dans le domaine complexe appliquée à une transformée de Laplace $F(p)$ revient à multiplier par e^{-at} la fonction $f(t)$ associée à $F(p)$.

b) Théorème du retard

Considérons un système qui, à une fonction entrée $f(t)$, fait correspondre une fonction sortie $s(t)$, telle que : $s(t) = f(t-T).g(t)$

- $g(t) = 0$ si la variable temps t est comprise entre 0 et T ;
- $g(t) = 1$ si la variable temps t est supérieure ou égale à T .

$$S(p) = L[s(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t).f(t-T) dt = \int_T^{\infty} e^{-pt} f(t-T) dt$$

Si, nous posons : $u = t - T$, nous déduisons : $du = dt$, ce qui donne :

$$S(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(u+T)} f(u) du = e^{-pT} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du$$

Soit : $S(p) = e^{-pT} F(p)$, ce qui revient à dire :

$$L[f(t-T)] = e^{-pT} L[f(t)]$$

Un retard de la quantité T appliqué à une fonction $f(t)$, permet de multiplier sa transformée par la quantité e^{-pT} .

5.2.5 Exemples de transformations de Laplace

a) Échelon unitaire

La fonction $u(t)$ est définie comme suit :

- $u(t) = 1$ pour $t > 0$,
- $u(t) = 0$ pour $t < 0$.

$$U(p) = \int_{0^+}^{\infty} u(t)e^{-pt} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-pt} dt$$

Si nous notons : $p = \sigma + j\omega$, pour σ positif, l'équation précédente devient :

$$U(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p}$$

b) Impulsion de Dirac

Une étude rigoureuse fait intervenir la théorie des distributions. Néanmoins, nous pouvons utiliser le raisonnement suivant. Nous considérons la fonction $f(t)$:

- $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$,
- $f(t) = \frac{t}{\tau}$ pour $0 \leq t \leq \tau$,
- $f(t) = 1$ pour $t \geq \tau$.

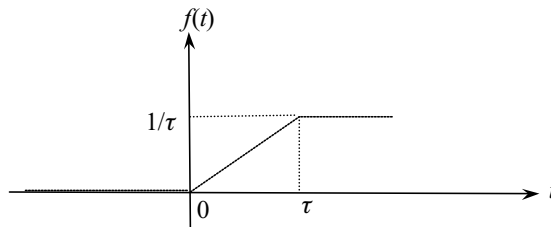


Figure 5.7 Représentation temporelle de $f(t)$.

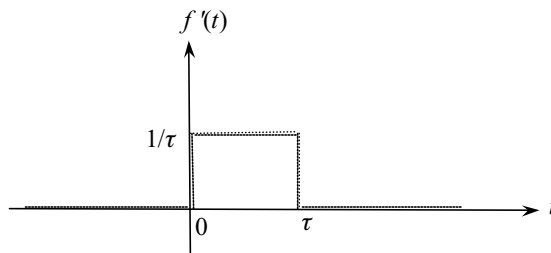


Figure 5.8 Représentation temporelle de la dérivée de $f(t)$.

La dérivée de la fonction $f(t)$ est représentée à la figure 5.8.

Pour $\tau \rightarrow 0$, $f'(t) \rightarrow \delta(t)$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Si τ tend vers zéro, la fonction $f(t)$ tend vers l'échelon unité $u(t)$. La fonction $f'(t)$ tend vers l'impulsion de Dirac, qui est notée $\delta(t)$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$. Ce qui montre que $\delta(t)$ peut être considérée comme la dérivée de l'échelon unité. Il en résulte : $L[\delta(t)] = 1$.

c) Fonction exponentielle

Pour $f(t) = e^{-at} u(t)$, la transformation de Laplace devient :

$$F(p) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(p+a)t} dt$$

pour $\sigma > a$: $L[f(t)] = F(p) = \frac{1}{p+a}$

Cette transformation joue un rôle important en analyse de système.

d) Fonction sinusoïdale

Pour : $f(t) = \cos(\omega t).u(t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]$, il vient :

$$F(p) = L[f(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Pour : $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$, il vient :

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

5.3 TRANSFORMATION INVERSE

Le passage de la transformation $F(p)$ à la fonction $f(t)$ s'obtient en utilisant la relation intégrale suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} F(p) e^{pt} dp \quad \text{avec : } p = \sigma + j\omega.$$

Le contour de l'intégration est une droite d'abscisse C positive ou nulle.

Dans le cadre de ce livre, nous supposons que les fonctions $f(t)$ possèdent des fonctions inverses $F(p)$. Nous supposons aussi que :

- $F(p)$ est un quotient de deux fonctions : le numérateur noté $N(p)$ et le dénominateur noté $D(p)$:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes en p de degré m et de degré n ;

- le degré du numérateur est inférieur d'au moins une unité à celui du dénominateur ;
- nous appelons zéros de la fonction $F(p)$ les m racines réelles ou complexes du numérateur $N(p)$ que nous pouvons noter z_i avec i qui varie entre 1 et m .
- nous appelons pôles de $F(p)$ les n racines réelles ou complexes du dénominateur $D(p)$ que nous pouvons noter p_i avec i qui varie entre 1 et n .

5.3.1 Première méthode

Une méthode classique pour trouver $f(t)$ consiste à décomposer la fonction rationnelle en éléments simples et, compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, à utiliser un dictionnaire de transformées.

Nous pouvons distinguer trois cas.

a) *Les pôles de $F(p)$ sont simples et distincts*

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Nous décomposons directement $F(p)$ en éléments simples :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

La détermination des coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ s'effectue par identification. Il suffit de réduire la somme des éléments simples au même dénominateur et d'identifier le numérateur obtenu à $N(p)$.

Connaissant l'original de $\frac{A_i}{(p - p_i)}$, soit $A_i e^{p_i t}$, et compte tenu de la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, nous trouverons :

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$$

Exemple : Soit la transformée de la place $F(p)$ correspondant à une fonction $f(t)$:

$$F(p) = \frac{p^2 + 5}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

Le dénominateur $D(p)$ est un polynôme admettant trois pôles simples qui sont :

$$p_1 = -1; \quad p_2 = -2; \quad p_3 = -3$$

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{(p+1)} + \frac{A_2}{(p+2)} + \frac{A_3}{(p+3)}$$

$$F(p) = \frac{A_1(p+2)(p+3) + A_2(p+1)(p+3) + A_3(p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$F(p) = \frac{A_1(p^2 + 5p + 6) + A_2(p^2 + 4p + 3) + A_3(p^2 + 3p + 2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$F(p) = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)p^2 + (5A_1 + 4A_2 + 3A_3)p + (6A_1 + 3A_2 + 2A_3)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ 5A_1 + 4A_2 + 3A_3 = 0 \\ 6A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 5 \end{cases}$$

La résolution du système d'équation précédent peut se faire en utilisant la méthode de Cramer ou par substitution. Le résultat donne : $A_1 = 3, A_2 = -9$ et $A_3 = 7$.

La transformée de Laplace devient :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{3}{(p+1)} + \frac{-9}{(p+2)} + \frac{7}{(p+3)}$$

L'original de $\frac{A_i}{(p-p_i)}$ est : $A_i e^{p_i t}$.

La fonction $f(t)$ devient en appliquant les résultats précédents :

$$f(t) = [3e^{-t}] + [-9e^{-2t}] + [7e^{-3t}] = 3e^{-t} - 9e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

Nous remarquons la lourdeur de cette méthode qui nécessite une décomposition en éléments simples.

b) Les pôles de $F(p)$ sont réels multiples

Lorsque $F(p)$ possède un ou plusieurs pôles réels multiples, les règles de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples donnent :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^r (p + \lambda_i) \cdot (p + \mu)^s} \quad \text{avec : } r + s = n$$

Nous décomposons directement $F(p)$ en éléments simples :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{(p + \lambda_i)} + \frac{b_n}{(p + \mu)^s} + \frac{b_{n-1}}{(p + \mu)^{s-1}} + \dots + \frac{b_1}{(p + \mu)}$$

- $R_i = [(p + \lambda_i) \times F(p)]_{p=-\lambda_i}$
- $b_s = [(p + \mu_i)^s \times F(p)]_{p=-\mu}$
- $b_{s-j} = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d p^j} (p + \mu_i)^s \times F(p) \right]_{p=-\mu}$
- $b_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d p^{n-1}} (p + \mu_i)^s \times F(p) \right]_{p=-\mu}$

c) Les pôles de $F(p)$ sont complexes

Lorsque $F(p)$ possède des pôles complexes, ceux-ci sont deux à deux conjugués puisque les coefficients sont réels :

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i \quad \text{et} \quad p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$$

Nous décomposons $F(p)$ en éléments simples en utilisant :

- une décomposition de $F(p)$ sur le corps des complexes, ce qui donne des coefficients complexes conjugués ;
- une décomposition de $F(p)$ sur le corps des réels.

5.3.2 Deuxième méthode

Une autre méthode connue sous le nom de formule de développement de Heaviside est applicable uniquement lorsque $H(p)$ ne possède que des pôles simples. Cette méthode permet de trouver $f(t)$ sans décomposer $F(p)$ en éléments simples. Si le dénominateur de degré m possède m pôles, nous aurons le résultat suivant :

L'original de $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ s'écrit alors sous la forme :

$$f(t) = \sum_{i=1}^m \frac{N(p_i) e^{p_i t}}{D'(p)}$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent de la transformée de Laplace $F(p)$ correspondant à une fonction $f(t)$:

$$F(p) = \frac{p^2 + 5}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

Le dénominateur $D(p)$ est un polynôme admettant trois pôles simples qui sont :

$$p_1 = -1; \quad p_2 = -2; \quad p_3 = -3$$

La dérivée du dénominateur est : $D'(p) = 3p^2 + 12p + 11$

Nous pouvons donc remplacer dans le numérateur, la variable p successivement par : -1 , -2 ou par -3 . Le résultat dans chaque cas donne :

$$N(p_i = -1) = 6; \quad N(p_i = -2) = 9; \quad N(p_i = -3) = 14$$

En remplaçant de la même façon dans la dérivée du dénominateur, la variable p par : -1 , -2 ou par -3 , nous obtenons :

$$D'(p_i = -1) = 2; \quad D'(p_i = -2) = -1; \quad D'(p_i = -3) = 2$$

La fonction $f(t)$ devient en appliquant les résultats précédents :

$$f(t) = \frac{N(p_i = -1)}{D'(p_i = -1)} e^{-t} + \frac{N(p_i = -2)}{D'(p_i = -2)} e^{-2t} + \frac{N(p_i = -3)}{D'(p_i = -3)} e^{-3t}$$

$$f(t) = [3e^{-t}] + [-9e^{-2t}] + [7e^{-3t}] = 3e^{-t} - 9e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

Nous remarquons la rapidité de cette méthode par rapport à la première méthode qui nécessite une décomposition en éléments simples.

5.4 MÉTHODES DE CALCUL

5.4.1 Recherche pratique des transformées

Pour trouver la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, nous utilisons les tables des transformées et les propriétés associées à cette fonction telles que linéarité et retard pur. Pour trouver une transformée inverse, il est nécessaire ou bien de décomposer $F(p)$ en éléments simples avant d'utiliser la propriété de linéarité, ou bien d'utiliser la deuxième méthode indiquée au paragraphe précédent.

Appliquons les notions précédentes aux réseaux et circuits électriques que nous utilisons et qui sont supposés être linéaires. La fonction de transfert d'un réseau étant décrite par une équation différentielle, sa transformée de Laplace est une fraction rationnelle en fonction de p : appliquons à un élément de circuit les relations élémentaires rencontrées auparavant :

- résistance pure : $u(t) = R.i(t) \rightarrow U(p) = R.I(p)$;
- capacité pure : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \rightarrow I(p) = Cp.U(p) - C.u(0^+)$;
- inductance pure : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow U(p) = Lp.I(p) - L.i(0^+)$.

De ce qui précède, il résulte que pour travailler avec le calcul opérationnel qui utilise la transformée de Laplace, il faut utiliser des schémas symboliques d'admittances et d'impédances tenant compte de l'état initial de l'élément considéré.

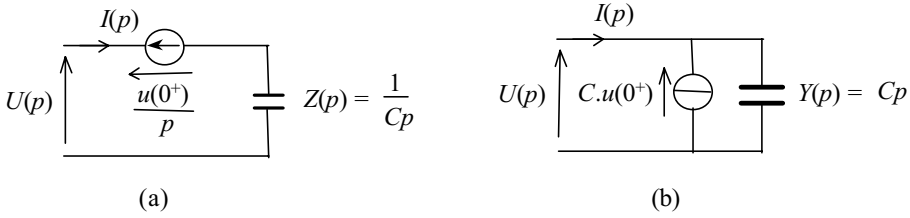


Figure 5.9 Schémas symboliques impédance (a) et admittance (b) d'un condensateur initialement chargé.

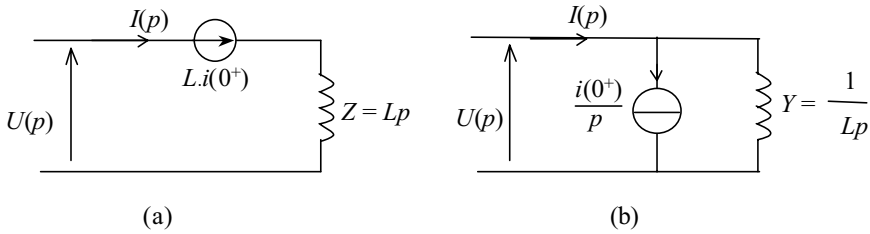


Figure 5.10 Schémas symboliques impédance (a) et admittance (b) d'une inductance initialement chargée.

Prenons par exemple le cas déjà rencontré d'un circuit *RLC* en série, nous trouvons en utilisant les notions précédentes appliquées à la loi d'Ohm :

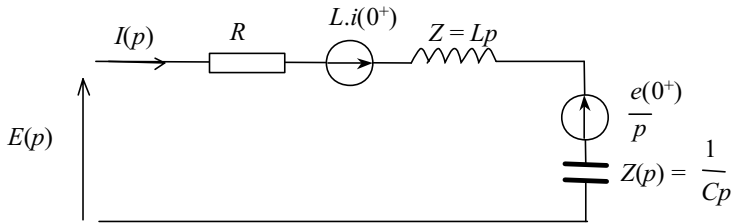


Figure 5.11 Schéma symbolique impédance d'un circuit *RLC* série.

$$E(p) = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I(p) - L.i(0^+) + \frac{e(0^+)}{p}$$

Supposant le cas particulier pour lequel les conditions initiales sont nulles, la quantité :

$$\frac{E(p)}{I(p)} = R + Lp + \frac{1}{Cp}$$

donne le rapport d'une sortie à une entrée. Elle porte le nom d'impédance isomorphe. Cette impédance donne en régime permanent sinusoïdal l'impédance classique (dite aussi isochrone) rencontrée au long de ce livre. En effet, il suffit de considérer comme nulle la partie réelle du complexe p . Nous remplaçons donc p par $j\omega$.

Nous pouvons aussi définir la fonction de transfert du circuit en prenant comme sortie la tension qui apparaît aux bornes du condensateur, de la bobine ou de la résistance.

Si par exemple nous prenons la tension aux bornes du condensateur, nous obtenons :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{1}{Cp} \times I(p)}{\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) \times I(p)} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2}$$

où $E(p)$ et $S(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace des signaux d'excitation $e(t)$ et de sortie $s(t)$ du réseau. Il est alors facile de calculer la réponse $s(t)$ d'un réseau soumis à l'excitation $e(t)$ en calculant la transformée inverse du produit $E(p) H(p)$.

5.4.2 Exemple : Charge d'un condensateur

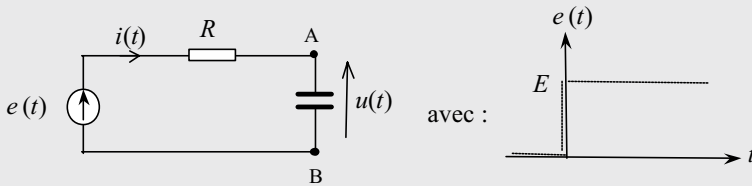


Figure 5.12 Exemple du circuit RC.

Supposons que le circuit RC est attaqué à l'instant « $t = 0$ » par une source de tension continue de force électromotrice E . La mise sous tension revient à appliquer au réseau un échelon de tension comme indiqué à la figure 5.12. Deux cas se présentent.

a) *Condition initiale nulle* : $u(0^+) = 0$

Ceci revient à supposer le condensateur déchargé. L'équation de la maille donne :

$$e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

dont la transformée de Laplace est :

$$E(p) = R \cdot I(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = \left(R + \frac{1}{Cp}\right) I(p) \quad \text{avec :} \quad E(p) = \frac{E}{p}.$$

L'impédance isomorphe du circuit RC étant : $R + \frac{1}{Cp}$, la résolution en $I(p)$ donne :

$$I(p) = \frac{E}{\left(R + \frac{1}{Cp}\right) p} = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \quad \text{soit :} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

L'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur s'obtient par :

$$U(p) = \frac{I(p)}{Cp} = \frac{E}{RC} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)} = E \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \right]$$

soit :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Nous pouvons constater sur cet exemple, qu'il n'y a plus de détermination des constantes d'intégration par l'étude des conditions initiales.

b) Condition initiale non nulle : $u(0^+) \neq 0$

Ceci revient à supposer qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déjà chargé avec une tension $u(0^+)$ supposée inférieure à E . Nous avons alors l'équation de la maille :

$$e(t) = E = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0^+)$$

dont la transformée de Laplace donne :

$$\frac{E}{p} = \left(R + \frac{1}{Cp} \right) I(p) + \frac{u(0^+)}{p} \quad \text{et :} \quad I(p) = \frac{E - u(0^+)}{p \left(R + \frac{1}{Cp} \right)}$$

Nous voyons donc que ce résultat ne diffère du précédent que par le changement de E en $E - u(0^+)$, le courant $i(t)$ devient :

$$i(t) = \frac{E - u(0^+)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

soit :

$$U(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u(0^+)}{p} = \frac{E}{p} - R \cdot I(p)$$

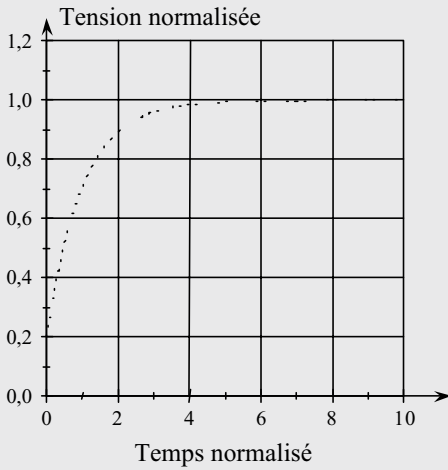
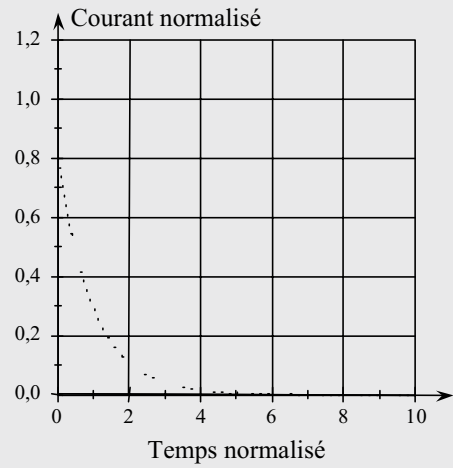
L'allure de l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur devient :

$$U(p) = \frac{u(0^+)}{p} + \frac{E - u(0^+)}{RCp \left(p + \frac{1}{RC} \right)}$$

ce qui donne :

$$u(t) = u(0^+) + (E - u(0^+)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Nous pouvons constater sur cet exemple que la condition initiale $u(0^+)$ intervient comme une source en échelon de tension. Les figures 5.13 et 5.14 sont données avec une tension $u(0^+)$ égale au cinquième de la tension échelon E .

Figure 5.13 Évolution de la tension $u(t)$.Figure 5.14 Évolution du courant $i(t)$.

5.4.3 Relation entre régime harmonique et régime quelconque

Nous avons indiqué précédemment au chapitre 3 qu'en régime harmonique par exemple, pour un condensateur pur, nous avons : $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ et qu'en régime quelconque le courant et la tension sont liés par : $i = C \frac{du}{dt}$.

En prenant la transformée de Laplace de cette dernière équation, il résulte :

$$I(p) = CpU(p)$$

Si nous introduisons la notion de transformée de Laplace d'une impédance $Z(p)$, il advient :

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{Cp}$$

Lorsque : $p = j\omega$, nous obtenons :

$$Z(j\omega) = \frac{1}{jC\omega}$$

Nous remarquons alors facilement que le remplacement de p par $j\omega$, permet le passage du régime harmonique en régime quelconque et inversement.

Souvent, nous nous intéressons au rapport entre une tension de sortie notée $s(t)$ et la tension d'entrée notée $e(t)$. Généralement ces deux tensions sont variables dans le temps suivant des lois différentes. Nous appelons fonction de transfert du quadripôle, la quantité définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

où p représente la variable de Laplace.

Dans la plupart des cas $H(p)$ est donnée par un rapport de deux polynômes en p :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

Pour un système physiquement réalisable, les coefficients a_i/b_i sont réels et m est inférieur ou égal à n . De plus, la condition de stabilité du quadripôle implique que les racines du dénominateur soient toutes à parties réelles négatives.

En régime sinusoïdal permanent, établi depuis un temps suffisamment long pour que les régimes transitoires soient devenus négligeables, la variable de Laplace p devient : $p = j\omega$ et la fonction de transfert devient une grandeur complexe qui permet de déterminer le gain et le déphasage pour toutes les fréquences f .

$$\text{si : } e(t) = E_m \sin(\omega t), \text{ alors : } s(t) = S_m \sin\{\omega t + \phi(\omega)\}$$

Le gain en amplitude est donné par le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = \frac{S_m}{E_m} = |H(j\omega)|$$

et le déphasage par la différence des phases de $s(t)$ et de $e(t)$.

$$\phi(\omega) = \text{phase de } s(t) - \text{phase de } e(t)$$

Nous avons étudié au chapitre 4, les réponses des circuits élémentaires à une excitation sinusoïdale. Il s'agissait de la réponse harmonique qui nous permettait de tracer les diagrammes de Bode. Étudions maintenant les réponses des circuits de base à une fonction échelon et à l'impulsion de Dirac. Nous supposons par la suite que les entrées sont des tensions.

a) *Filtre passe-bas de premier ordre*

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas de premier ordre simple est :

$$H(p) = H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec : } \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\text{Arctan}(\omega \tau)$$

► Réponse impulsionnelle

La tension d'entrée $e(t) = \delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac dont la transformée de Laplace est : $E(p) = 1$.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En utilisant la table des transformées de Laplace, nous obtenons :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p}$$

qui donne :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$$

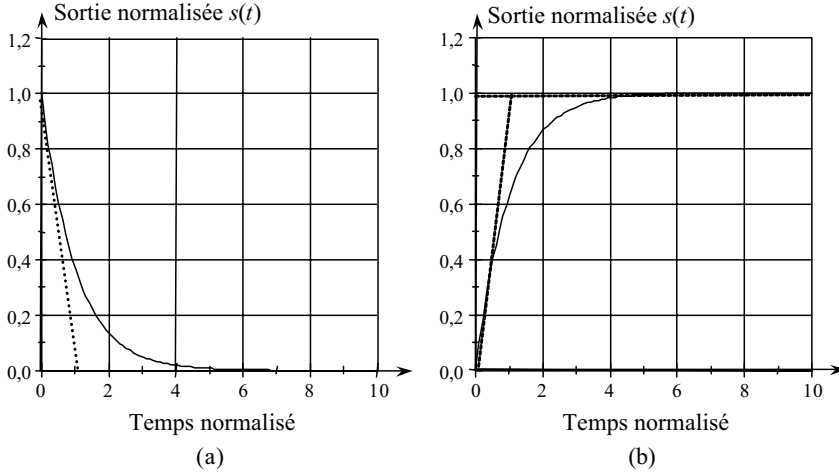


Figure 5.15 Réponse impulsionnelle (a) et réponse indicielle (b) d'un filtre passe-bas de premier ordre.

► Réponse indicielle

La tension d'entrée est un échelon de tension : $e(t) = E$ dont la transformée est : $\frac{E}{p}$.
La transformée de la sortie est :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{E}{p}$$

En décomposant $S(p)$ en fraction rationnelle et en utilisant la table des transformées de Laplace, nous trouvons :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{E}{p} = KE \left(\frac{A}{1 + \tau p} + \frac{B}{p} \right) = KE \left(\frac{Ap + B(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p)} \right)$$

$$S(p) = KE \left(\frac{B + p(A + \tau B)}{p(1 + \tau p)} \right)$$

qui donne par identification : $B = 1$ et $A = -\tau$.

$$S(p) = KE \left(\frac{-\tau}{(1 + \tau p)} + \frac{1}{p} \right) \Rightarrow s(t) = KE(1 - e^{-t/\tau})$$

b) Filtre passe-bas de second ordre

Nous avons étudié au chapitre 4 la réponse harmonique d'un filtre polynomial passe-bas de second ordre, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec ω_0 qui représente la pulsation propre et m est le coefficient d'amortissement. K est le gain statique obtenu pour des pulsations : $\omega \ll \omega_0$. Le coefficient de qualité Q du filtre est donné par $Q = \frac{1}{2m}$.

Pour simplifier le calcul, nous supposons $E = 1$ et $K = 1$. Le dénominateur est un polynôme de second degré en p . Quatre cas se présentent selon le signe du discriminant.

► Régime apériodique ou régime amorti : $m > 1$

Le discriminant est positif, le dénominateur possède deux racines réelles. La fonction de transfert est alors décomposable en deux facteurs de premier ordre.

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau_1 p} \frac{1}{1 + \tau_2 p} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

avec : $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$

Le système revient à la mise en cascade de deux filtres du premier ordre.

• Réponse indicielle

La tension d'entrée est un échelon de tension : $e(t) = E$ dont la transformée est :

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{1}{p}$$

La transformée de la sortie devient :

$$S(p) = \frac{\omega_0^2}{p((p + m\omega_0)^2 - a^2)}$$

La réponse indicielle qui est représentée à la figure 5.16 (a) dans le cas particulier d'un coefficient d'amortissement $m = 3$, donne :

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{sh\varphi} sh(at + \varphi)$$

ou en développant :

$$s(t) = 1 - \frac{1}{2} \left[(1 + b) e^{-\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})t} + (1 - b) e^{-\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})t} \right]$$

avec $b = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$. La sortie $s(t)$ s'écrit aussi sous une forme plus simple :

$$s(t) = 1 + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} [\omega_1 e^{-\omega_2 t} - \omega_2 e^{-\omega_1 t}]$$

avec : $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$; $\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$

Si $m \gg 1$, l'une des racines des deux facteurs de premier ordre l'emporte sur l'autre et la réponse indicielle ressemble à celle d'un filtre de premier ordre.

• Réponse impulsionnelle

La tension d'entrée $e(t) = \delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac dont la transformée de Laplace est : $E(p) = 1$. Si nous notons $a^2 = \omega_0^2(m^2 - 1)$, la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 - a^2} = \frac{\omega_0^2}{a} \frac{a}{(p + m\omega_0)^2 - a^2}$$

Cette forme d'écriture de la fonction de transfert permet d'utiliser directement la table des transformées et de déduire la réponse impulsionnelle :

$$s(t) = \frac{\omega_0^2}{a} e^{-m\omega_0 t} sh(at)$$

Sachant que :

$$sh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}, \quad a^2 = \omega_0^2(m^2 - 1)$$

$$\omega_1 = \omega_0 \left(m - \sqrt{m^2 - 1} \right), \quad \omega_2 = \omega_0 \left(m + \sqrt{m^2 - 1} \right)$$

Le développement de l'équation précédente de $s(t)$ donne :

$$s(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1 - \omega_2} (e^{-\omega_2 t} - e^{-\omega_1 t})$$

► Régime à faible amortissement : $m < 1$

Pour ce régime à faible amortissement ou oscillatoire amorti (nous disons aussi système pseudo-périodique), le discriminant est négatif. Le polynôme possède donc deux racines complexes conjuguées, $p = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$. La fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)}$$

• Réponse indicielle

La réponse indicielle est donnée par :

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1 - m^2}} \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1 - m^2} - \arctan \left(\frac{3}{\sqrt{1 - m^2}} \right) \right)$$

Le système est en régime très peu amorti ou régime oscillatoire amorti. Nous définissons une pseudo-période T_a qui correspond à l'intervalle du temps qui sépare deux maximums ou deux minimums successifs :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$$

La réponse indicielle peut alors s'écrire sous la forme :

$$s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

avec : $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$

L'instant de l'apparition du premier maximum est :

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} = \frac{T_a}{2}$$

Le dépassement transitoire noté D représente l'écart entre l'amplitude du premier maximum et la valeur finale à l'équilibre obtenue après un temps infini. Son expression est :

$$D = \frac{e^{-m\omega_0 T_M}}{\sqrt{1-m^2}} \times 100 \%$$

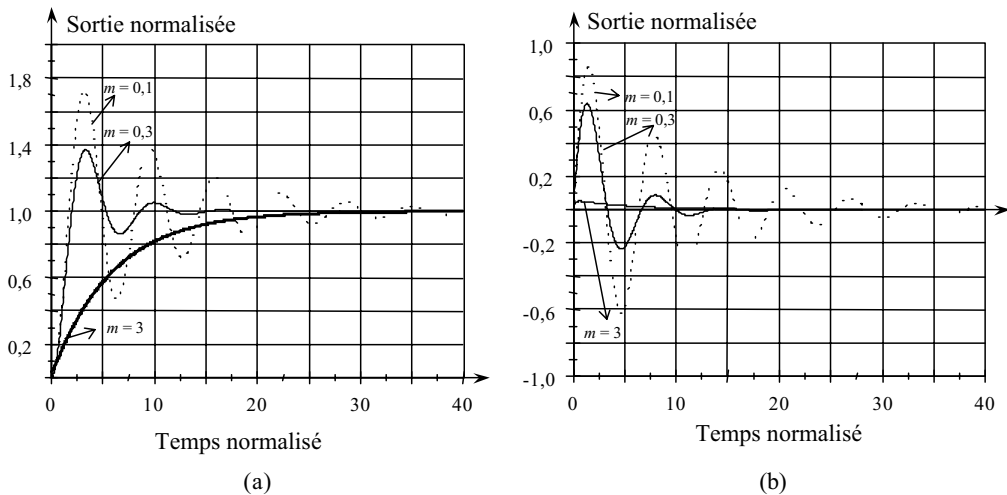


Figure 5.16 Réponses indicielle (a) et impulsionnelle (b) d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour trois cas du coefficient m .

Le dépassement est de 100 % pour $m = 0$. Il s'agit du cas particulier d'un système oscillant à la pulsation $\omega_M = \omega_0$.

• Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_a t)$$

► Régime critique : $m = 1$

Les deux racines du dénominateur de la fonction de transfert sont réelles confondues :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

• **Réponse indicielle**

La réponse indicielle est donnée par :

$$s(t) = 1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

• **Réponse impulsionnelle**

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s(t) = \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

► Régime oscillatoire pur : $m = 0$

• **Réponse indicielle**

La réponse indicielle est donnée par :

$$s(t) = 1 - \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos(\omega_0 t)$$

• **Réponse impulsionnelle**

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

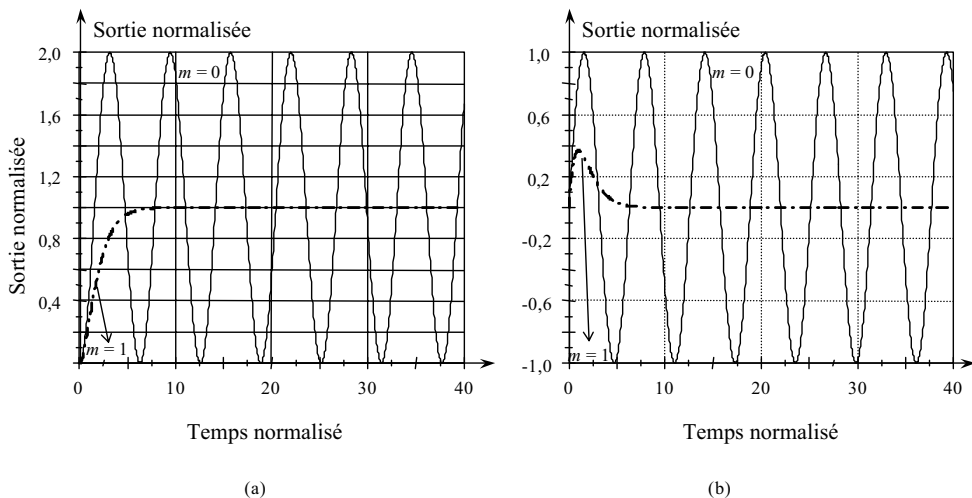


Figure 5.17 Réponses indicielle (a) et impulsionnelle (b) d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour $m = 1$ et pour $m = 0$.

Tableau 5.2 Tableau des transformées de Laplace de fonctions usuelles.

Fonction $f(t)$	$F(p)$	Fonction $f(t)$	$F(p)$
Constante a	$\frac{a}{p}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$u(t)$: fonction unité	$\frac{1}{p}$	$e^{-\alpha t} sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$
$\delta(t)$: fonction de Dirac	1	$e^{-\alpha t} ch(\omega t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$
$\delta'(t)$	p	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\delta''(t)$	p^2	$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$t sh(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$	$t ch(\omega t)$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$t\sqrt{t}$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4p^2\sqrt{p}}$	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\arctan\left(\frac{\omega}{p}\right)$
$\frac{1}{t\sqrt{t}}$	$-2\sqrt{p\pi}$	$\frac{1 - \cos(\omega t)}{t}$	$\ln\left(\frac{\sqrt{p^2 + \omega^2}}{p}\right)$
$\frac{1}{1+t}$	$e^{-p} \int_{-\infty}^{-p} \frac{e^x}{x} dx$	$\frac{1 - ch(\omega t)}{t}$	$\ln\left(\frac{\sqrt{p^2 - \omega^2}}{p}\right)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$ch(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\cos(\omega t) \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + 4\omega^2}$
$sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	e^t	$\frac{1}{p - 1}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$

CE QU'IL FAUT RETENIR

► L'équation différentielle qui régit un circuit de premier ordre est :

$$s(t) + \tau s'(t) = Ke(t) \quad \text{ou} \quad s(t) + \tau \times \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

τ est la constante du temps du système, et K le gain statique (gain en régime permanent).

La solution de l'équation précédente est : $s(t) = Ke(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. A et K sont des constantes.

► L'équation différentielle qui régit un circuit de second ordre est :

$$\omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 s'(t) + s''(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

$$\text{ou : } \omega_0^2 s(t) + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = K\omega_0^2 e(t)$$

m est le coefficient d'amortissement ; ω_0 est la pulsation propre du système non amorti

K est le gain statique obtenu pour le continu ou pour des pulsations très faibles devant ω_0 .

$$Q = \frac{1}{2m} \text{ représente facteur de qualité.}$$

La solution peut se mettre sous la forme de la somme de deux solutions :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$s_1(t)$ est la solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) ;

$s_2(t)$ est la solution particulière de l'équation avec second membre (régime permanent).

La réponse en régime permanent (régime sinusoïdal forcé) a été vue au chapitre 4. L'étude du régime transitoire donne une solution qui s'écrit sous la forme :

$$s_1(t) = Ae^{-\omega t}$$

avec :

$\omega_1 = \omega_0 \left(m - \sqrt{m^2 - 1} \right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(m + \sqrt{m^2 - 1} \right)$, soit quatre régimes de fonctionnement :

$m > 1$ représente le régime amorti ; $m < 1$ représente le régime oscillatoire amorti ;

$m = 1$ représente le régime critique et $m = 0$ représente le régime oscillatoire pur.

$$s_1(t) = A_1 e^{(-m\omega_0 + j\omega_a)t} + A_2 e^{(-m\omega_0 - j\omega_a)t} = e^{-m\omega_0 t} (A_1 e^{j\omega_a t} + A_2 e^{-j\omega_a t})$$

$m < 1$, le système fonctionne en régime oscillatoire amorti, on définit T_a qui correspond à l'intervalle de temps séparant deux maximums ou deux minimums successifs :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} \quad \text{soit :} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$$

$$\text{et :} \quad f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}{2\pi} = f_0 \sqrt{1-m^2}$$

Si on note $\alpha = m\omega_0$, on a :

$$s_1(t) = Ae^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_a t + \varphi) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t \sqrt{1-m^2} + \varphi)$$

► La transformation de Laplace fait correspondre à une fonction $f(t)$ une fonction $F(p)$ de la variable complexe p définie par : $L[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ avec : $p = \sigma + j\omega$

$$L[f(t)] = F(p) \quad \text{et} \quad L^{-1}[F(p)] = f(t)$$

► Théorème de la valeur initiale :

$$\text{si } F(p) = L[f(t)], \text{ alors } \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0^+).$$

► Théorème de la valeur finale :

$$\text{si } F(p) = L[f(t)], \text{ alors } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty).$$

► On donne les transformées de Laplace des principales fonctions :

Fonction $f(t)$	$F(p)$	Fonction $f(t)$	$F(p)$
Constante a	$\frac{a}{p}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$u(t)$: fonction unité	$\frac{1}{p}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$: fonction de Dirac	1	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$\delta'(t)$	p	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
$\delta''(t)$	p^2	$\text{ch}(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

► La fonction de transfert d'un passe-bas de premier ordre est :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

► Si l'entrée $e(t) = \delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac, on a : $E(p) = 1$, la fonction de transfert du filtre passe bas devient :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En utilisant la table des transformées de Laplace, on obtient :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau} \times \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p}.$$

Soit la réponse impulsionnelle du passe bas de premier ordre : $s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$.

► Si l'entrée $e(t) = E$ qui représente un échelon de tension, on a : $E(p) = E/p$, la fonction de transfert du filtre passe bas devient :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \times \frac{E}{p} = KE \left(\frac{A}{1 + \tau p} + \frac{B}{p} \right) = KE \left(\frac{Ap + B(1 + \tau p)}{p(1 + \tau p)} \right)$$

Par identification, on a : $B = 1$ et $A = -\tau$.

$$S(p) = KE \left(\frac{-\tau}{(1 + \tau p)} + \frac{1}{p} \right)$$

Soit la réponse indicielle du passe pas de premier ordre : $s(t) = KE (1 - e^{-t/\tau})$.

EXERCICES

Exercice 5.1 Filtre passe-haut de premier ordre en régime transitoire

Calculer, en fonction du temps, la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes de la résistance du filtre passe-haut si $e(t)$ est une impulsion de durée t_d et d'amplitude E .

Nous supposons que : $e(t) = E$ pour $0 < t < t_d$ et $e(t) = 0$ pour $t > t_d$.

Nous supposons aussi que $t_d \gg RC$.

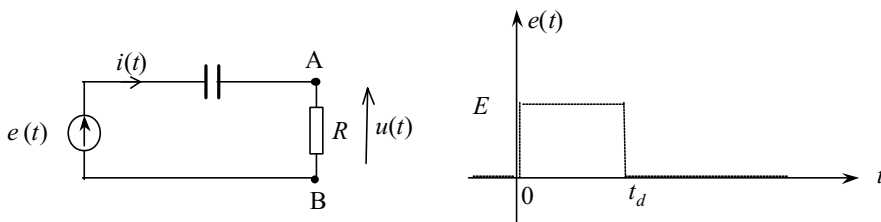


Figure 5.18 Filtre passe-haut en régime transitoire.

Solution L'équation de la maille donne : $e(t) = u(t) + u_C(t)$.

Or, la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ est déjà connu grâce à l'étude du circuit intégrateur paragraphe 5.1.2. Nous obtenons donc :

- pour le début de l'impulsion (front montant) :

$$u(t) = e(t) - u_C(t) = E - E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

- pour la fin de l'impulsion (front descendant) :

$$u(t) = e(t) - u_C(t) = -E e^{-\frac{t}{RC}}$$

En prenant l'origine des temps au début de l'impulsion, nous obtenons :

- pour $0 < t < t_d$: $u(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$;
- pour $t > t_d$: $u(t) = -E \left(1 - e^{-\frac{t_d}{RC}} \right) e^{-\frac{t-t_d}{RC}}$.

Les signaux d'entrée et de sortie sont représentés à la figure 5.19. L'interprétation physique consiste à considérer le condensateur comme un court-circuit pour les variations rapides (fréquences très élevées).

Cette propriété importante est très souvent utilisée dans l'étude des circuits. Le front abrupt des impulsions est transmis intégralement par le condensateur et apparaît intégralement à la sortie aux bornes de la résistance.

La réponse se rapproche de la dérivée du signal d'entrée par rapport au temps. Pour cette raison, le circuit est connu sous le nom de circuit de différentiation ou circuit de dérivation.

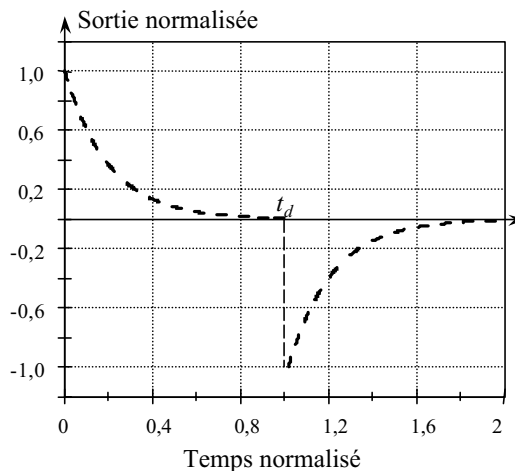


Figure 5.19 Tension de sortie normalisée en fonction du temps.

Exercice 5.2 Réponse indicielle d'un circuit RL

Soit le montage du circuit RL donné à la figure 5.20.

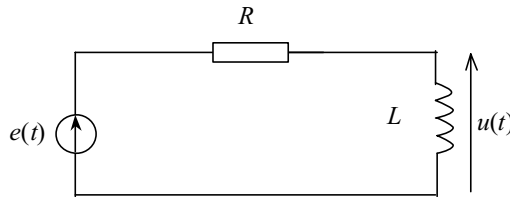


Figure 5.20 Circuit RL.

Utiliser deux méthodes pour calculer en fonction du temps, le courant $i(t)$ qui s'établit dans le circuit si $e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E :

$$e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \quad e(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Solution

Première méthode :

L'équation de la maille donne :

$$E = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Appliquons la méthode de la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1. Nous cherchons la solution générale sans second membre, ainsi que la solution particulière :

- Solution générale sans second membre

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

d'où :

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

Nous intégrons les deux membres de l'égalité et nous obtenons :

$$\ln \left(\frac{i(t)}{k} \right) = -\frac{R}{L} t$$

d'où :

$$i(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

avec : K qui est une constante d'intégration.

- Solution particulière

Elle est de la même forme que l'excitation $e(t)$ qui est une tension constante. Nous obtenons le résultat directement :

$$i(t) = \frac{E}{R}$$

• Solution finale

La solution finale s'obtient en additionnant la solution particulière et la solution de l'équation sans second membre. Il vient :

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

K dépend des conditions initiales. Nous savons que pour $t = 0$, le courant $i(t)$ est nul.

$$i(t=0) = 0 = K.e^{-\frac{R}{L} \times 0} + \frac{E}{R} = K + \frac{E}{R}$$

soit :

$$K = -\frac{E}{R}.$$

Finalement, nous pouvons déduire l'expression du courant en fonction du temps :

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec :

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Deuxième méthode :

La deuxième méthode utilise la transformation de Laplace. L'équation de la maille s'écrit dans ces conditions :

$$E = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

d'où :

$$\frac{E}{p} = RI(p) + L(pI(p) - 0)$$

donc :

$$I(p) = \frac{E}{p(R + Lp)} = \frac{E}{L} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{R}{L}} \right)$$

Nous déterminons par identification :

$$A = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad B = -\frac{L}{R}$$

ce qui donne :

$$I(p) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right)$$

En utilisant la table des transformées de Laplace, nous obtenons :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Exercice 5.3 Réponse d'un circuit de premier ordre à une rampe

Nous étudions la réponse d'un circuit d'ordre 1 à une rampe $e(t) = at$.

Supposons un circuit électrique de premier ordre, soumis à l'instant $t = 0$ à une excitation d'entrée sous forme d'une rampe, qui s'écrit sous la forme : $e(t) = at$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation de sortie $s(t)$.

2. Tracer $e(t)$ et $s(t)$.

Solution

1. L'équation différentielle d'un circuit électrique de premier ordre soumis à une excitation sous forme d'une rampe $e(t) = at$, s'écrit sous la forme :

$$s(t) + \tau s'(t) = at \quad \text{ou} \quad s(t) + \tau \times \frac{ds(t)}{dt} = at$$

τ étant la constante du temps du système. Nous cherchons les deux solutions $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

• Solution de l'équation sans second membre

Pour trouver la solution générale $s_1(t)$ de l'équation sans second membre, nous résolvons :

$$s(t) + \tau s'(t) = 0$$

ce qui donne : $s_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

A étant la constante d'intégration.

• Solution particulière

Pour trouver la solution particulière $s_2(t)$ de l'équation, il suffit de prendre la solution qui correspond au régime permanent. L'excitation d'entrée étant de la forme :

$$e(t) = a_0 + a_1 t$$

avec :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = a.$$

La solution doit avoir la même forme que l'excitation, soit :

$$s_2(t) = b_0 + b_1 t$$

ce qui donne en régime permanent :

$$\frac{ds_2(t)}{dt} = b_1$$

L'équation : $s(t) + \tau s'(t) = s_2(t) + \tau s_2'(t) = at$ donne : $b_0 + b_1 t + \tau b_1 = at$.

Nous pouvons donc en déduire par identification :

$$b_1 = a, \quad b_0 + \tau b_1 = 0 \quad \text{soit} \quad b_0 = -\tau b_1 = -a\tau$$

La solution finale devient :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + at - a\tau$$

La condition initiale permet de déterminer la constante A . En effet, à $t = 0$, la sortie est :

$$s(0) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + at - a\tau = A - a\tau = 0$$

ce qui donne : $A = a\tau$.

La solution finale est donc :

$$s(t) = a\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + a(t - \tau)$$

2. Nous traçons en premier lieu la droite représentant l'excitation $e(t) = at$. Nous remarquons que lorsque le temps t devient assez élevé, la sortie $s(t)$ tends vers l'asymptote $s(t) = a(t - \tau)$. Il s'agit d'une droite parallèle à la droite $e(t) = at$. Les différentes courbes sont données à la figure 5.21.

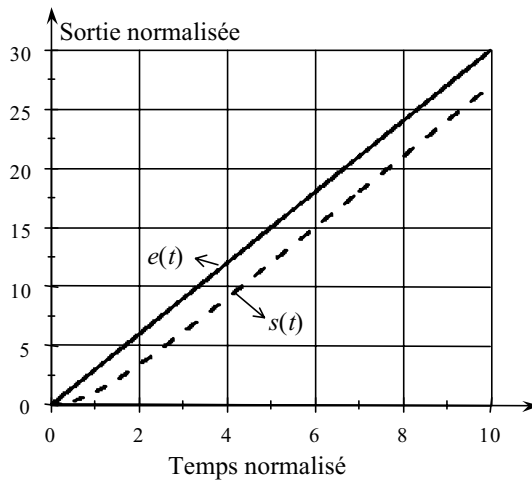


Figure 5.21 Allure de $e(t)$ et $s(t)$ pour $a = 1,5$ et $\tau = 2$.

Exercice 5.4 Réponse d'un circuit de premier ordre à une excitation sinusoïdale

Nous étudions la réponse d'un circuit d'ordre 1 à l'établissement d'un régime sinusoïdal. Supposons un circuit électrique de premier ordre, soumis à l'instant $t = 0$ à une excitation d'entrée sous forme d'un signal sinusoïdal :

$$e(t) = E \sin(\omega t + \phi)$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation de sortie.
2. Tracer $e(t)$ et $s(t)$ en supposant $\phi = 0$ et $\omega\tau = 1$.

Solution

L'équation différentielle d'un circuit électrique de premier ordre soumis à une excitation sous forme d'une sinusoïde : $e(t) = E \sin(\omega t + \phi)$, s'écrit sous la forme :

$$s(t) + \tau s'(t) = E \sin(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = E \sin(\omega t + \phi)$$

τ étant la constante du temps du système. Nous recherchons les deux solutions $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

• *Solution de l'équation sans second membre*

Pour trouver la solution générale $s_1(t)$ de l'équation sans second membre, nous résolvons : $s(t) + \tau s'(t) = 0$ ce qui donne :

$$s_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est la constante d'intégration.

• *Solution particulière*

Pour trouver la solution particulière $s_2(t)$ de l'équation, il suffit de prendre la solution qui correspond au régime permanent, l'excitation d'entrée étant de la forme :

$$e(t) = E \sin(\omega t + \phi)$$

La solution doit avoir la même forme que l'excitation, soit :

$$s_2(t) = E_2 \sin(\omega t + \phi + \varphi)$$

ce qui donne en régime permanent :

$$s_2(t) + \tau \frac{ds_2(t)}{dt} = E_2 \sin(\omega t + \phi + \varphi) + \omega \tau E_2 \cos(\omega t + \phi + \varphi) = E \sin(\omega t + \phi)$$

Nous déduisons donc que :

$$\tan(\varphi) = \omega \tau$$

ce qui donne :

$$s_2(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t + \phi + \varphi)$$

La solution finale devient :

$$s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t + \phi + \varphi)$$

La condition initiale permet de déterminer la constante A . En effet, à l'instant $t = 0$, la sortie est nulle.

Si nous prenons le cas particulier pour lequel $\phi = 0$, nous trouvons : $s(0) = 0$, soit :

$$s(0) = A + \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\varphi) = 0$$

soit :

$$A = -\frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\varphi)$$

La solution finale est donc :

$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \left[\sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

2. Nous traçons en premier lieu la courbe sinusoïdale de l'excitation $e(t) = E \cdot \sin(\omega t)$. Nous remarquons que la sortie est une courbe qui est la somme de deux parties. Lorsque le temps t devient assez élevé, la sortie $s(t)$ tend vers une courbe sinusoïdale d'amplitude $\frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$.

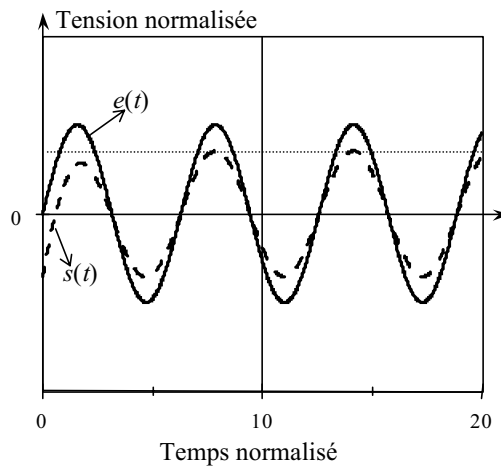


Figure 5.22 Allure de $e(t)$ et réponse transitoire $s(t)$ pour un premier ordre.

Exercice 5.5 Etude du principe d'un filtre simple à capacités commutées

Pour réaliser des filtres à capacités commutées, on utilise le principe suivant. On charge un condensateur C_1 avec une charge Q_1 et on ferme ensuite l'interrupteur K pour transférer une partie de la charge accumulée dans C_1 vers C_2 ($Q_1 > Q_2$).

1. On suppose une charge initiale Q_1 accumulée dans C_1 et une charge Q_2 accumulée dans C_2 . Déterminer l'expression en fonction du temps du courant $i(t)$ et tracer cette courbe.

2. Déterminer l'état d'équilibre final lorsque le temps tend vers l'infini. En déduire les expressions en fonction du temps de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$. Tracer les courbes $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

3. Déterminer le bilan des différentes énergies du montage avant et après la fermeture de l'interrupteur.

Application numérique : $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 90 \text{ nF}$, $R = 11 \text{ k}\Omega$ et on suppose que les charges accumulées à l'instant $t = 0$ sont : $Q_1 = 100 \times 10^{-9} \text{ C}$ et $Q_2 = 0 \text{ C}$.

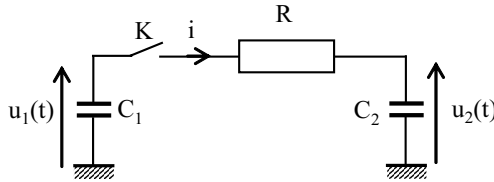


Figure 5.23 Montage simple à capacités commutées.

Solution

1. Evolution dans le temps du courant $i(t)$

Lorsque l'interrupteur K est ouvert, le condensateur C_1 a emmagasiné une quantité de charges Q_1 et le condensateur C_2 a emmagasiné une quantité de charges Q_2 :

$$Q_1 = C_1 U_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = C_2 U_2$$

A l'instant $t = t_0$, on ferme l'interrupteur. Puisque la charge Q_1 est supérieure à la charge Q_2 , un courant circule dans la résistance R de gauche à droite.

Or, ce courant est un courant qui augmente la charge du condensateur C_2 et baisse la charge du condensateur C_1 . Il vient :

$$i(t) = -\frac{dQ_1}{dt} = -C_1 \frac{du_1(t)}{dt} = +\frac{dQ_2}{dt} = +C_2 \frac{du_2(t)}{dt}$$

On applique la loi des mailles, on trouve :

$$u_1(t) = Ri(t) + u_2(t) \quad \text{soit :} \quad -u_1(t) + Ri(t) + u_2(t) = 0$$

Si on dérive cette équation, on obtient :

$$-\frac{du_1(t)}{dt} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{du_2(t)}{dt} = 0 \quad \text{soit :} \quad \frac{i}{C_1} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i}{C_2} = 0$$

Après simplification, on trouve : $RC_{\text{eq}} \frac{di(t)}{dt} + i = 0$, avec : $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Il s'agit d'une équation différentielle de premier ordre dont la solution est :

$$i(t) = Ke^{-t/\tau},$$

avec :

$$\tau = RC_{\text{eq}} = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 11 \times 10^3 \times \frac{10 \times 10^{-9} \times 100 \times 10^{-9}}{110 \times 10^{-9}} = 100 \mu\text{s}$$

La valeur de la constante K est déterminée en utilisant les conditions initiales ($t = t_0 = 0$) :

$$i(t = 0) = Ke^{-0/\tau} = K,$$

or à l'origine du temps on a : $i(t = 0) = \frac{U_1 - U_2}{R}$

Finalement, on détermine l'expression du courant $i(t)$:

$$i(t) = \frac{1}{R} \times (U_1 - U_2) \times e^{-t/\tau} = \frac{1}{R} \times \left(\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} \right) \times e^{-t/\tau},$$

avec : $\tau = 100 \mu\text{S}$.

$$i(t) = \frac{1}{11 \times 10^3} \times \left(\frac{100 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-9}} - \frac{0}{C_2} \right) \times e^{-t/\tau} = 0,9 \times 10^{-3} \times e^{-t/\tau} \text{ A}$$

L'allure de $i(t)$ est donnée à la figure 5.24.

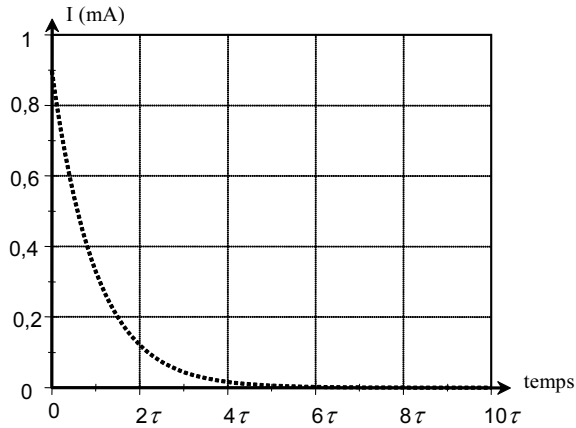


Figure 5.24 Allure du courant $i(t)$.

2. Expressions de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$

Lorsque le temps tend vers l'infini, le condensateur C_1 ne peut plus donner une quantité d'énergie. Le courant $i(t)$ s'annule et la chute de tension sur la résistance R est nulle.

$$i(t = \infty) = 0 \quad , \quad u_1(t = \infty) = u_2(t = \infty) = u(t = \infty)$$

et

$$\frac{Q_1(t = \infty)}{C_1} = \frac{Q_2(t = \infty)}{C_2} = u(t = \infty)$$

On sait que le courant s'écrit :

$$i(t) = -C_1 \frac{du_1(t)}{dt} \quad \text{ou bien :} \quad i(t) = +C_2 \frac{du_2(t)}{dt}$$

Si on intègre l'une ou l'autre des équations précédentes, l'expression de la tension $u_1(t)$ ou $u_2(t)$ est obligatoirement sous forme d'exponentielle :

$$u_1(t) = A_1 + K_1 e^{-t/\tau}, \quad \text{avec :} \quad \tau = RC_{\text{eq}} = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

On sait d'après la conservation de la charge électrique totale que :

$$Q_1(t=0) + Q_2(t=0) = 100 \times 10^{-9} = Q_1(t=\infty) + Q_2(t=\infty)$$

Autrement dit, on peut écrire :

$$100 \times 10^{-9} = C_1 \times u(t=\infty) + C_2 \times u(t=\infty) = (C_1 + C_2) \times u(t=\infty)$$

$$u(t=\infty) = \frac{100 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-9} + 100 \times 10^{-9}} \approx 0,9 \text{ V}$$

La valeur de A_1 et de K_1 sont déterminées en utilisant les conditions initiales ($t=0$) et le régime permanent ($t=\infty$) :

$$u_1(t=0) = A_1 + K_1 e^{-0/\tau} = A_1 + K_1 = U_1 = 10 \text{ V} \quad \text{et} \quad u_1(t=\infty) = A_1 \approx 0,9 \text{ V}$$

Finalement, on détermine l'expression de la tension $u_1(t)$:

$$u_1(t) = u_1(t=\infty) + (u_1(t=0) - u_1(t=\infty)) \times e^{-t/\tau} = 0,9 + 9,1 \times e^{-t/\tau}$$

L'expression de la tension $u_2(t)$ devient :

$$u_2(t) = 0,9 \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

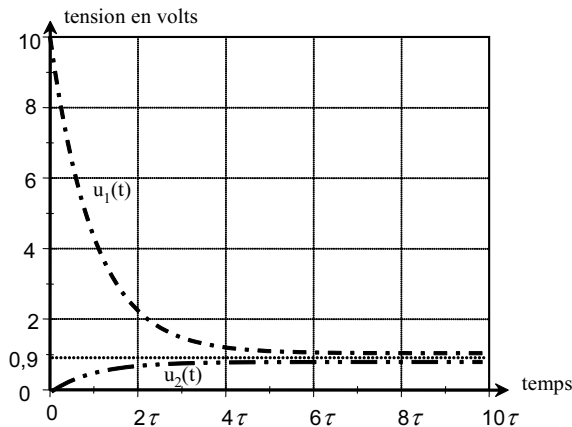


Figure 5.25 Allure de $u_1(t)$ et de $u_2(t)$.

3. Bilan énergétique

A l'instant $t=0$, aucun courant ne circule, le condensateur C_1 a accumulée une énergie électrostatique initiale E_{i1} et le condensateur C_2 a accumulée une énergie électrostatique initiale E_{i2} :

$$E_{i1}(t=0) = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \quad , \quad E_{i2}(t=0) = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 0$$

L'énergie initiale totale accumulée par les deux condensateurs est :

$$E_{iT}(t=0) = \frac{1}{2} (C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2) = \frac{1}{2} C_1 U_1^2$$

A l'état final qui correspond au régime déterminé à l'instant $t = \infty$, aucun courant ne circule, le condensateur C_1 a accumulée une énergie électrostatique finale E_{f1} et le condensateur C_2 a accumulée une énergie électrostatique finale E_{f2} :

$$E_{f1}(t = \infty) = \frac{1}{2} C_1 U_1^2(t = \infty) \quad , \quad E_{f2}(t = \infty) = \frac{1}{2} C_2 U_2^2(t = \infty)$$

L'énergie finale totale accumulée par les deux condensateurs est :

$$E_{iT}(t = \infty) = \frac{1}{2} (C_1 U_1^2(t = \infty) + C_2 U_2^2(t = \infty)) = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2(t = \infty)$$

On peut donc calculer la variation de l'énergie entre l'état initial ($t = 0$) et l'état final ($t = \infty$) :

$$\begin{aligned} E_{iT}(t = \infty) - E_{iT}(t = 0) \\ = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2(t = \infty) - \frac{1}{2} (C_1 U_1^2(t = 0) + C_2 U_2^2(t = 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E = E_{iT}(t = \infty) - E_{iT}(t = 0) \\ = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U^2(t = \infty) - \frac{1}{2} (C_1 U_1^2(t = 0) + C_2 U_2^2(t = 0)) \end{aligned}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} [(110 \times 10^{-9}) \times (0.9)^2 - (10 \times 10^{-9}) \times (10)^2] = -455,45 \times 10^{-9} \text{ J}$$

Or, l'expression de l'énergie dissipée par la résistance R est :

$$\begin{aligned} E_R &= \int_0^\infty R i^2(t) dt = R \times \int_0^\infty i^2(t) dt \\ &= R \times \frac{(U_1(t=0) - U_2(t=0))^2}{R^2} \int_0^\infty [e^{-t/\tau}]^2 dt \\ E_R &= \frac{(U_1(t=0) - U_2(t=0))^2}{R} \times \left[-\frac{\tau}{2} \times e^{-2t/\tau} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \tau \times \frac{(U_1(t=0) - U_2(t=0))^2}{R} \end{aligned}$$

On injecte l'expression de τ dans cette équation et on trouve :

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2} \times R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C} \times \frac{(U_1(t=0) - U_2(t=0))^2}{R} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{C_1 C_2}{C_1 + C} \times (U_1(t=0) - U_2(t=0))^2 \end{aligned}$$

$$E_R = \frac{1}{2} \times R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C} \times \frac{(U_1(t=0) - U_2(t=0))^2}{R} = \frac{1}{2} \times \frac{C_1 C_2}{C_1 + C} \times (U_1(t=0))^2$$

$$E_R = \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 10^{-9} \times 100 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-9} + 100 \times 10^{-9}} \times 10^2 = 454,5 \times 10^{-9} \text{ J}$$

On retrouve bien que la quantité d'énergie dissipée par la résistance est égale à la quantité d'énergie cédée par les deux condensateurs (la petite différence est due aux approximations de calcul). Comme quoi, rien ne se gagne, rien ne se perd, tout se transforme.

Exercice 5.6 Méthode de mesure de la valeur d'une résistance élevée

On souhaite mesurer la valeur d'une résistance élevée (figure 5.26). La résistance interne du voltmètre vaut : $R_V = 10 \text{ M}\Omega$. La capacité du condensateur vaut : $C = 22 \mu\text{F}$. L'interrupteur K peut être relié au générateur (position 1), à la charge (position 2) ou rester non relié (position 0).

1. L'interrupteur K est en position 1. Le voltmètre affiche au bout d'un temps $t = 50 \text{ s}$ la valeur mesurée $V_{m1} = 12 \text{ volts}$. On commute l'interrupteur en position 0 à l'instant $t = 0$, le voltmètre indique au bout d'un temps $t = 50 \text{ s}$ la valeur mesurée $V_{m0} = 9 \text{ volts}$.

Calculer la valeur de la résistance de fuite R_f du condensateur C .

2. On remet l'interrupteur K est en position 1. On commute maintenant l'interrupteur en position 2 à l'instant $t = 0$, le voltmètre indique au bout d'un temps $t = 50 \text{ s}$ la valeur mesurée $V_{m2} = 7,5 \text{ volts}$.

Calculer la valeur de la résistance R .

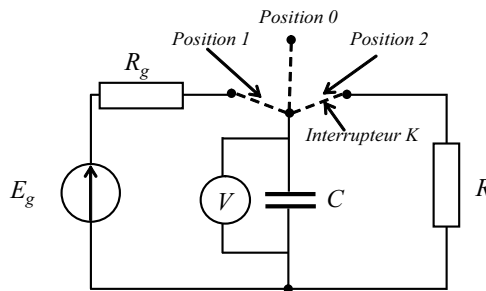


Figure 5.26 Montage de mesure de grandes résistances.

Solution

1. Calcul de la résistance de fuite R_f

L'interrupteur K est en position 1 (figure 5.27). Le voltmètre affiche au bout d'un temps $t = 50 \text{ s}$ la valeur mesurée $V_{C1} = V_{m1} = 12 \text{ volts}$. Cette tension représente la tension de charge du condensateur.

On commute l'interrupteur en position 0 à l'instant $t = 0$ (figure 5.27), le voltmètre indique au bout d'un temps $t = 50$ s la valeur mesurée $V_{C0} = V_{m0} = 9$ volts. Or, le condensateur qui était chargé avec $V_{C1} = V_{m1} = 12$ volts se décharge en position zéro dans sa résistance de fuite R_f qui se trouve en parallèle avec la résistance du voltmètre R_V .

La tension instantanée $v_C(t)$ est :

$$v_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C} = (R_f // R_V) \times i_1(t) \quad \text{avec : } i_1(t) = \frac{-dQ_C(t)}{dt}$$

Ce qui donne : $v_C(t) \times \frac{1}{(R_f // R_V) C} + \frac{dv_C(t)}{dt} = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle dont la solution est :

$$v_C(t) = V_{C1} e^{-t/R_{\text{eq0}}} = V_{m1} e^{-t/R_{\text{eq0}}} \quad \text{avec : } R_{\text{eq0}} = R_f // R_V = \frac{R_f R_V}{R_f + R_V}$$

Le condensateur C commence à se décharger d'une façon exponentielle à partir de sa valeur d'origine qui est V_{m1} . Or, après $t = 50$ s, la tension devient :

$$v_C(t = 50) = v_{m0} = 9 = V_{m1} e^{-50/R_{\text{eq0}}}$$

On en déduit :

$$R_{\text{eq0}} = \frac{50}{C \times \ln\left(\frac{V_{m1}}{v_{m0}}\right)} = \frac{50}{22 \times 10^{-6} \times \ln\left(\frac{12}{9}\right)} = 7,9 \times 10^6 \Omega = 7,9 \text{ M}\Omega$$

On tire facilement la valeur de la résistance de fuite du condensateur :

$$R_{\text{eq0}} = 7,9 \times 10^6 = \frac{R_V R_f}{R_V + R_f} = \frac{10 \times 10^6 \times R_f}{10 \times 10^6 + R_f}$$

Soit : $(7,9 \times 10^6) R_f + (7,9 \times 10^6) \times (10 \times 10^6) = 10 \times 10^6 \times R_f$

Finalement on trouve : $R_f = 37,6 \times 10^6 \Omega = 37,6 \text{ M}\Omega$

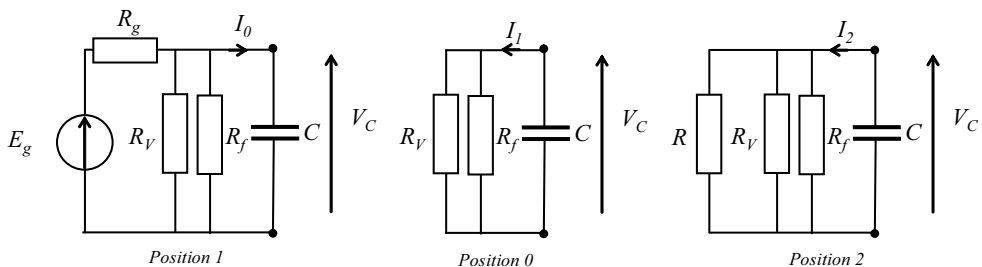


Figure 5.27 Montages équivalents selon les positions.

1. Calcul de la résistance R

L'interrupteur K est de nouveau en position 1 (figure 5.27). Le voltmètre affiche au bout d'un temps $t = 50$ s la valeur mesurée $V_{C1} = V_{m1} = 12$ volts.

On commute l'interrupteur en position 2 à l'instant $t = 0$ (figure 7), le voltmètre indique au bout d'un temps $t = 50$ s la valeur mesurée $V_{C2} = V_{m2} = 7,5$ volts. Or, le condensateur qui était chargé avec $V_{C1} = V_{m1} = 12$ volts se décharge en position 2 dans la résistance équivalente R_{eq2} formée de la mise en parallèle de la résistance de fuite R_f de la résistance interne du voltmètre R_V et de la résistance R .

La tension instantanée $v_C(t)$ devient :

$$v_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C} = (R_f // R_V // R) \times i_2(t) \quad \text{avec :} \quad i_2(t) = \frac{-dQ_C(t)}{dt}$$

Ce qui donne :

$$v_C(t) \times \frac{1}{(R_f // R_V // R) C} + \frac{dv_C(t)}{dt} = v_C(t) \times \frac{1}{R_{\text{eq2}} C} + \frac{dv_C(t)}{dt} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle dont la solution est :

$$v_C(t) = V_{C1} e^{-t/R_{\text{eq2}}} = V_{m1} e^{-t/R_{\text{eq2}}} \quad , \quad \text{avec :} \quad \frac{1}{R_{\text{eq2}}} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}$$

Le condensateur C commence à se décharger d'une façon exponentielle à partir de sa valeur d'origine qui V_{m1} . Or, après $t = 50$ s, la tension devient :

$$v_C(t = 50) = v_{m2} = 7,5 = V_{m1} e^{-50/R_{\text{eq2}}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} R_{\text{eq2}} &= \frac{50}{C \times \ln\left(\frac{V_{m1}}{v_{m2}}\right)} = \frac{50}{22 \times 10^{-6} \times \ln\left(\frac{12}{7,5}\right)} \\ &= 4,835 \times 10^6 \Omega = 4,8359 \text{ M}\Omega \end{aligned}$$

On tire facilement la valeur de la résistance à mesurer R :

$$\frac{1}{R_{\text{eq2}}} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R} = \frac{1}{10 \times 10^6} + \frac{1}{37,65 \times 10^6} + \frac{1}{R}$$

Soit :

$$\frac{1}{4,835 \times 10^6} - \frac{1}{10 \times 10^6} - \frac{1}{37,65 \times 10^6} = \frac{1}{R}$$

Finalement on trouve :

$$R = 12,458 \times 10^6 \Omega = 12,458 \text{ M}\Omega$$

Chapitre 6

Circuits à transistors et à amplificateurs opérationnels

Les montages utilisés jusqu'à présent dans ce livre sont constitués exclusivement d'éléments passifs : résistances, condensateurs, inductances et de sources de tensions ou de courants. Mais, généralement en électronique, en électrotechnique et en automatique, nous sommes amenés à utiliser des composants actifs en vue de réaliser une fonction particulière telle que l'amplification ou l'adaptation d'impédance. Pour étudier ce genre de circuit, les composants actifs doivent être remplacés par leurs modèles équivalents, valables souvent uniquement en dynamique à petits signaux. Il s'agit souvent de modèles sous formes de quadripôles donnés avec un choix judicieux de leurs paramètres.

Nous étudions dans ce chapitre quelques montages qui utilisent des transistors bipolaires, des transistors à effet de champ ou bien des amplificateurs opérationnels.

6.1 LES TRANSISTORS BIPOLAIRES

6.1.1 Classification sommaire des transistors

Les transistors sont réalisés par la jonction de différentes zones de semi-conducteurs de types N et P. Il existe actuellement deux grandes classes de transistors :

- D'une part les transistors bipolaires constitués de trois zones de semi-conducteurs : une zone N, une zone P et une zone N, pour un transistor NPN, (ou bien une zone P, une zone N et une zone P, pour un transistor PNP). Ces trois zones sont reliées aux

trois électrodes appelées : émetteur (E), base (B) et collecteur (C). Une jonction est polarisée dans le sens direct, la jonction émetteur-base, l'autre dans le sens inverse, la jonction collecteur-base. Ces transistors sont appelés « bipolaires » car les deux types de porteurs de charges qui sont les électrons et les trous, participent à la conduction électrique.

- D'autre part, les transistors unipolaires dans lesquels un seul type de porteurs de charge est responsable du passage du courant. Ce sont les transistors à effet de champ (TEC), ou transistors FET. (Field Effect Transistors). Les trois électrodes sont la source (S), la grille ou porte, appelée aussi en anglais *gate* (G), et le drain (D). L'emplacement des zones de semi-conducteurs est variable suivant les technologies, mais les zones extrêmes sont toujours reliées l'une à la source, l'autre au drain.

Les transistors à effet de champ se répartissent eux-mêmes en deux groupes, les J-FET pour lesquels la grille est directement en contact avec une zone de semi-conducteur et les MOS-FET pour lesquels la grille est isolée d'une zone de semi-conducteur par une couche isolante, par exemple SiO_2 , d'où l'appellation MOS (Metal-Oxide-Semi-conducteur). Les MOS-FET se subdivisent encore en MOS-FET à enrichissement et MOS-FET à enrichissement-appauvrissement, suivant l'absence ou la présence d'une couche de semi-conducteur sous l'isolant de la grille, en l'absence de tensions de polarisations.

La figure 6.1 donne un aperçu des différents types de transistors : un transistor bipolaire NPN et des transistors FET dits à « canal N » car le courant drain-source passe par des zones N, avec leurs représentations symboliques et les sens de polarisation. Pour leurs homologues PNP et « canal P », il suffit d'inverser le sens des flèches, de remplacer les « + » par des « - » et les « - » par des « + », les N par des P et les P par des N.

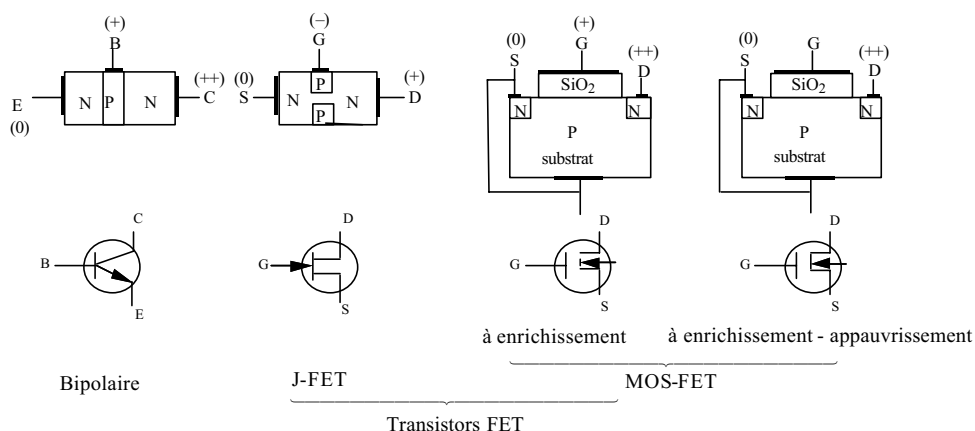


Figure 6.1 Aperçu des différents types de transistors.

6.1.2 Les transistors bipolaires

Un transistor bipolaire est constitué d'un monocristal de semi-conducteur (principalement le silicium) dopé pour obtenir deux jonctions, disposées en série et de sens opposé. Il existe donc deux types fondamentaux de transistors bipolaires, dits complémentaires :

- les transistors NPN dans lesquels une mince couche de type P est comprise entre deux zones de type N (figure 6.2 (a)) ;
- les transistors PNP dans lesquels une mince couche de type N est comprise entre deux zones de type N (figure 6.2 (b)).

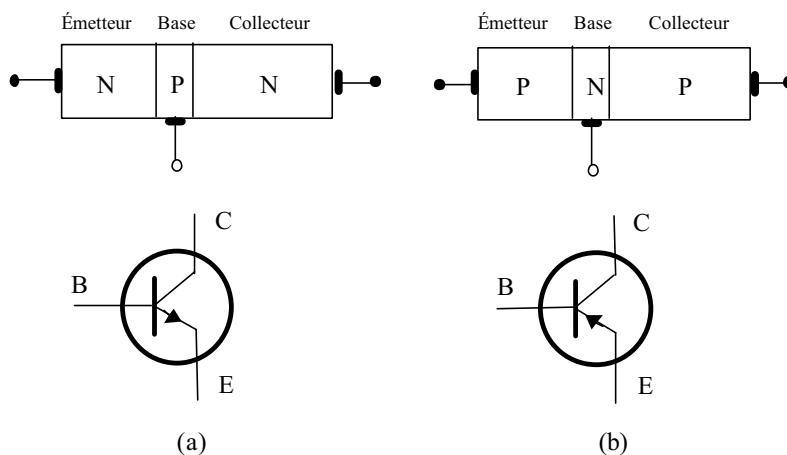


Figure 6.2 Représentations schématisques et symboles des transistors bipolaires.

6.1.3 Définitions

La couche intermédiaire est appelée base. Cette couche est très mince et légèrement dopée. Les porteurs majoritaires sont donc en quantité assez faible.

L'une des deux autres zones est appelée émetteur. Il s'agit de la zone la plus dopée du transistor. Son rôle consiste à injecter des porteurs (électrons dans le cas d'un transistor NPN) dans la base.

La dernière zone qui est de même type que l'émetteur est appelée collecteur. Son dopage est plus faible que celui de l'émetteur et sa géométrie est différente. Le rôle principal du collecteur est de recueillir les porteurs.

Le transistor est donc un composant à trois bornes (tripôle) reliées respectivement à l'émetteur, à la base et au collecteur. Sa représentation schématique, ainsi que les symboles normalisés sont donnés en figure 6.2 pour les deux types.

6.1.4 Fonctionnement du transistor NPN

L'étude sera menée sur un transistor bipolaire de type NPN qui est le plus utilisé et le plus facile à réaliser. Le fonctionnement d'un transistor de type PNP se déduit facilement en échangeant les rôles des électrons ainsi que des trous et en inversant les signes des tensions d'alimentation et des courants.

a) L'effet transistor

Parmi les différentes façons de polariser un transistor de type NPN, une seulement présente un intérêt primordial. Si nous polarisons la jonction émetteur-base en direct et la jonction collecteur-base en inverse, nous obtenons la configuration suivante (figure 6.3) :

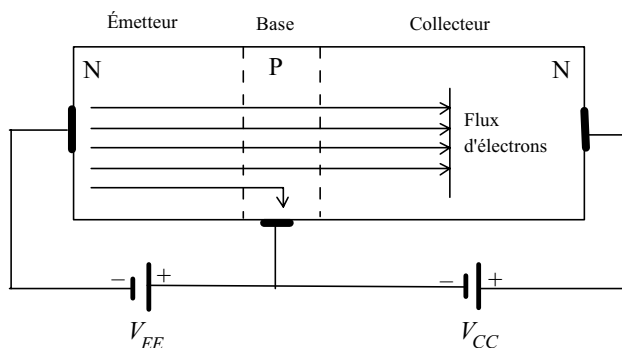


Figure 6.3 Polarisation directe et principe de l'effet transistor.

En premier lieu, supposons que seule la jonction BC soit polarisée et qu'elle le soit en inverse. Elle est traversée par un courant très faible dû aux porteurs minoritaires appelé I_{CB0} .

Polarisons maintenant la jonction base-émetteur en direct. Les électrons qui sont majoritaires dans la région de l'émetteur (type N) diffusent en grande quantité à travers la jonction émetteur-base, polarisée en direct, créant ainsi un courant émetteur I_E .

Les électrons de l'émetteur traversent en majorité la base et arrivent jusqu'au collecteur. Ainsi l'émetteur « injecte » ou « émet » des porteurs majoritaires et le collecteur les collecte.

b) Gain en courant β

Nous appelons α la proportion des électrons dans le cas du transistor NPN émis par l'émetteur, qui parviennent jusqu'au collecteur ; α est généralement proche de l'unité. Le courant total sera donné par la formule suivante :

$$I_C = -\alpha I_E + I_{CB0} \approx -\alpha I_E \approx -I_E$$

À l'équilibre, nous n'avons pas de variation de charges à l'intérieur du transistor. En choisissant les sens des courants conformément à la convention des réseaux (tout courant qui arrive à un nœud est positif et tout courant qui en sort est négatif), nous pouvons écrire la loi de Kirchhoff :

$$I_E + I_B + I_C = 0$$

En éliminant I_E nous obtenons :

$$I_C = \alpha (I_B + I_C) + I_{CB0}$$

$$I_C = \frac{\alpha_{CC}}{1 - \alpha_{CC}} I_B + \frac{1}{1 - \alpha_{CC}} I_{CB0}$$

Nous posons $\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, d'où :

$$I_C = \beta_{CC} I_B + I_{CE0}$$

Cette dernière relation caractérise l'effet transistor : en injectant un courant I_B très faible dans la base, nous commandons un courant de collecteur I_C beaucoup plus intense. β varie dans de grandes proportions d'un transistor à l'autre. En effet, β dépend surtout de la différence de dopage entre l'émetteur et la base ainsi que de celle-ci. Mais à une température fixe, β reste à peu près constant pour un transistor donné et pour une large variation du courant I_C .

6.1.5 Schéma équivalent en petits signaux

Le transistor bipolaire sert souvent à amplifier un courant ou une tension variable en fonction du temps (donc non continus) : pour simplifier l'étude, cette tension (ou courant) est souvent considérée comme étant sinusoïdale. Le transistor doit être polarisé correctement avec un point de fonctionnement (I_{C0} , V_{CE0}), l'indice « 0 » désigne le continu.

Pour un point de fonctionnement bien déterminé, lorsque nous superposons une tension (ou un courant) alternative, le transistor peut être modélisé par un schéma équivalent sous forme d'un quadripôle valable en petits signaux. Ce schéma est donné à la figure 6.4. La matrice qui s'y attache est la matrice hybride $[h]$.

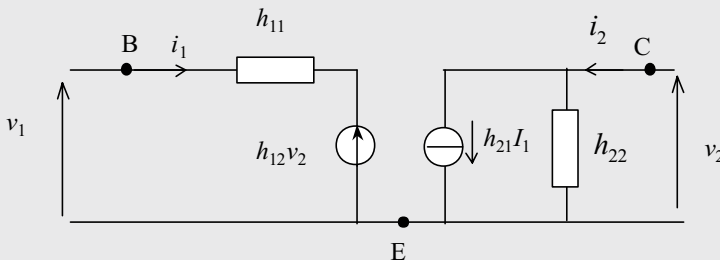


Figure 6.4 Schéma équivalent d'un transistor en utilisant les paramètres $[h]$.

Ces paramètres permettent de calculer par exemple le gain en tension, l'impédance d'entrée et l'impédance de sortie. Mais, les paramètres universels sont plus significatifs en changeant juste les noms des paramètres hybrides (figure 6.5).

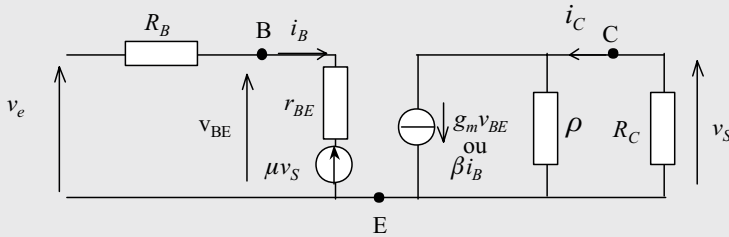


Figure 6.5 Schéma équivalent d'un transistor en utilisant les paramètres universels.

- $r_{BE} = h_{11}$: résistance d'entrée à sortie fermée ;
- $\mu = h_{12}$: coefficient de réaction interne, souvent négligeable ;
- $\beta = h_{21}$ = gain en courant à sortie fermée ;
- g_m : pente ou transconductance à sortie fermée ;
- $\rho = h_{22}$: résistance de sortie à entrée fermée.

À moins de les considérer comme grandeurs complexes, ces paramètres universels ne sont valables qu'en basses fréquences. Ce schéma équivalent peut être complété en ajoutant les condensateurs internes qui correspondent aux différentes jonctions du transistor.

6.2 LES TRANSISTORS À EFFET DE CHAMP

6.2.1 Principe de fonctionnement

Considérons un transistor à effet de champ à jonction canal N (J - FET) tout à fait schématique, constitué d'un barreau cylindrique de semi-conducteur de type N entouré d'une zone de semi-conducteur de type P. Les extrémités de la zone centrale N sont reliées l'une au drain, l'autre à la source. La zone P est reliée à la grille (figure 6.6).

Si toutes les électrodes sont au même potentiel, la zone N centrale et la zone P périphérique forment une jonction PN non polarisée et, au voisinage de la jonction, il existe une zone de déplétion dépourvue de porteurs de charges : figure 6.6 (a).

Si la grille est au même potentiel que la source ($U_{GS} = 0$), et que l'on porte le drain à un potentiel positif par rapport à la source ($U_{DS} > 0$), les électrons sont attirés de la source vers le drain, ils se déplacent dans la zone N en évitant la zone de déplétion et en empruntant une sorte de « canal » constitué par la zone N au voisinage de l'axe du barreau. Un courant I_D circule du drain vers la source (sens inverse du déplacement des électrons).

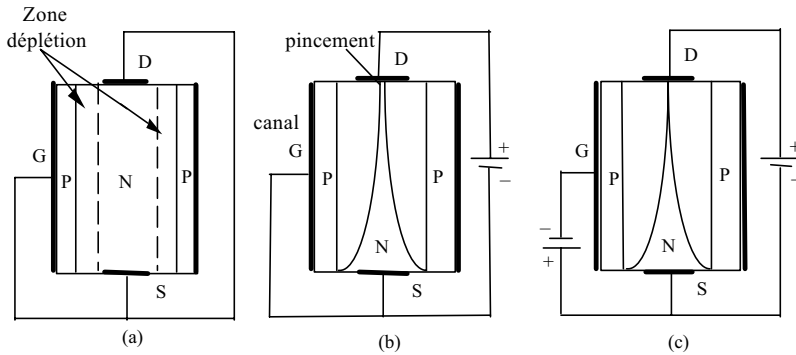


Figure 6.6 Principe de fonctionnement d'un transistor à effet de champ.

En augmentant la tension U_{DS} , la largeur de la zone de déplétion au niveau du drain atteint un maximum qu'elle ne dépasse plus. La section du canal devient minimale, le canal est dit « pincé » : figure 6.6 (b). Ceci se produit pour une tension grille-drain, particulière, appelée tension de pincement U_P , ($U_P < 0$). Nous avons :

$$U_{DS} = U_{DG} + U_{GS} = -U_{GD} + U_{GS}$$

Ici, avec $U_{GS} = 0$:

$$U_{DS} = -U_P + 0 = -U_P \quad (U_{DS} > 0)$$

Le courant I_D devient maximal et prend la valeur particulière notée I_{DSs} .

Portons maintenant la grille à un potentiel négatif par rapport à la source, en fixant par exemple $U_{GS} = -1V$. La zone de déplétion au départ, pour $U_{DS} = 0$ est déjà plus large qu'elle ne l'était avec la caractéristique précédente à $U_{GS} = 0$. Lorsque U_{DS} croît, la zone de déplétion croît comme précédemment mais, comme nous sommes partis d'une zone de déplétion déjà plus large, nous atteignons plus rapidement la tension qui provoque le pincement au niveau du drain : figure 6.2 (c). Il suffit que :

$$U_{DS} = -U_{GD} + U_{GS} = U_P - 1V$$

Lorsque la tension U_{DS} dépasse la tension de pincement U_P , l'évolution du courant I_D est donnée par l'équation suivante :

$$I_D = I_{DSs} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P} \right)^2$$

6.2.2 Grandeurs caractéristiques et schéma équivalent

Dans la zone de pincement qui est la zone de fonctionnement normal du transistor à effet de champ, nous définissons :

► La transconductance ou pente g_m :

$$g_m = \left(\frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \right) U_{DS} = \text{cte} \quad \text{soit :}$$

$$g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} = -\frac{2I_{DSs}}{U_p} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right)$$

Cette pente est maximale lorsque $U_{GS} = 0$, elle est alors égale à :

$$g_{mo} = -\frac{2I_{DSs}}{U_p}$$

d'où :

$$g_m = g_{mo} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right) = g_{mo} \frac{\sqrt{I_D}}{\sqrt{I_{DSs}}}$$

► La résistance drain-source r_{ds} :

$$r_{ds} = \left(\frac{\Delta U_{DS}}{\Delta I_D} \right)_{U_{GS}=\text{cte}}$$

La résistance d'entrée d'un transistor à effet de champ est la résistance d'une jonction PN polarisée en inverse. Cette résistance est donc très élevée et nous pouvons la considérer comme infinie. Le schéma équivalent en alternatif est celui de la figure 6.7.

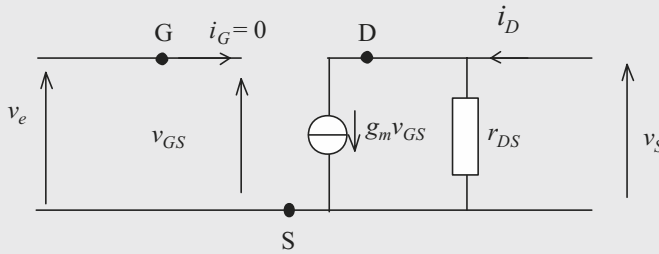


Figure 6.7 Schéma équivalent d'un transistor à effet de champ.

6.3 CIRCUITS À TRANSISTORS

Nous allons prendre deux exemples pour expliquer la méthode de calcul sur les circuits qui utilisent des transistors bipolaires ou à effet de champ.

6.3.1 Réponse en fréquence d'un montage émetteur commun découplé

D'une manière schématique, il convient de retenir que le comportement vers les basses fréquences d'un étage d'amplification est lié à la présence de condensateurs de liaison ou de découplages tandis que le comportement en haute fréquence est lié aux capacités parasites inter-électrodes des composants actifs (transistors).

Considérons le montage émetteur commun de la figure 6.8.

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 50 \text{ k}\Omega, \quad R_E = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_C = 3 \text{ k}\Omega, \quad R_g = 3 \text{ k}\Omega$$

$$C_E = 1 \text{ }\mu\text{F}, \quad C_1 = 10 \text{ }\mu\text{F}, \quad V_{CC} = 12 \text{ V}$$

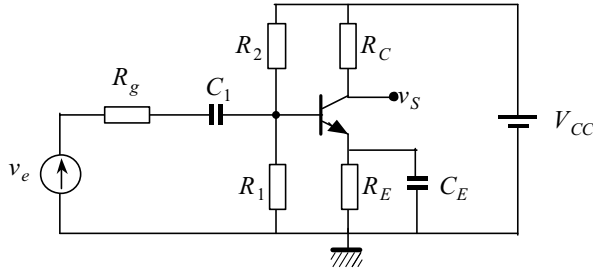


Figure 6.8 Montage émetteur commun découplé.

Nous supposons aussi que : $\beta = 100$, que la tension de la jonction base-émetteur : $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$ et que le condensateur de liaison C_1 est un court-circuit pour la gamme de fréquence utilisée.

a) Schéma équivalent

Nous définissons :

$$Z_E = \frac{R_E}{1 + jR_E C_E \omega} \quad \text{et} \quad R_p = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

Si nous notons Z_E l'impédance équivalente vue côté émetteur ($Z_E = R_E // C_E$), la figure 6.9 (a) présente le schéma équivalent de ce montage. Le schéma équivalent est obtenu en appliquant le théorème de superposition. En effet pour l'alternatif petits signaux, nous passivons la source de tension continue V_{CC} , ce qui revient à la remplacer par un court-circuit. Le théorème de Thévenin nous permet de simplifier le schéma équivalent de la figure 6.9 (a) pour obtenir la figure 6.9 (b). Les expressions suivantes permettent de passer de la figure 6.9 (a) à la figure 6.9 (b).

$$e' = e = v_e \times \frac{R_p}{R_p + R_g}, \quad R'_{\text{éq}} = \frac{R_p \cdot R_g}{R_p + R_g} \quad \text{et} \quad R_{\text{éq}} = R'_{\text{éq}} + r_{BE}$$

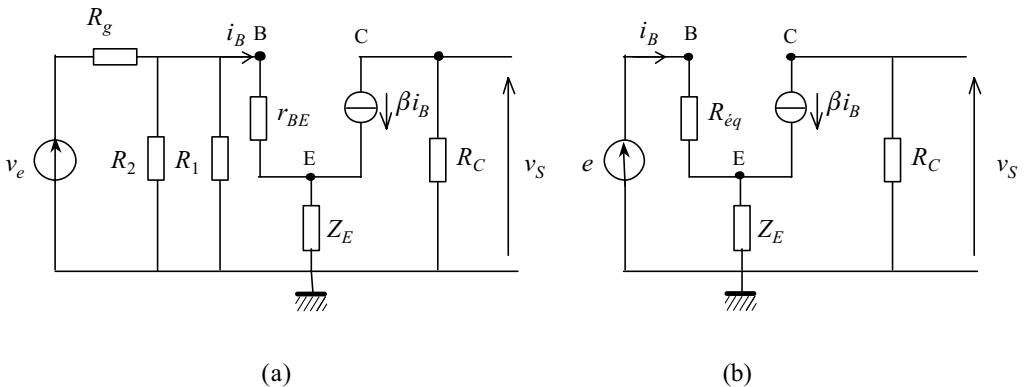


Figure 6.9 Schéma équivalent (a) et schéma équivalent simplifié (b).

b) Gain en tension

Sur le schéma de la figure 6.9 (b), nous avons :

$$v_s = -R_C \beta i_B \quad \text{et} \quad e = R_{\acute{e}q} i_B + Z_E (\beta + 1) i_B$$

soit :

$$\frac{v_s}{e} = \frac{-\beta R_C}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) \cdot Z_E}$$

en remplaçant Z_E par son expression, nous déterminons l'amplification :

$$\frac{v_s}{e} = \frac{-\beta R_C}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) \times \left(\frac{R_E}{1 + jR_E C_E \omega} \right)} = \frac{-\beta R_C (1 + jR_E C_E \omega)}{R_{\acute{e}q} (1 + jR_E C_E \omega) + (\beta + 1) R_E}$$

$$\frac{v_s}{e} = \frac{-\beta R_C}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) R_E} \times \frac{1 + jR_E C_E \omega}{1 + (jR_E C_E \omega) \times \frac{R_{\acute{e}q}}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) R_E}}$$

$$\frac{v_s}{e} = \frac{-\beta R_C}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) R_E} \times \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Les deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2 sont :

$$\begin{aligned} \omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{1}{R_E C_E} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 2\pi f_2 = \frac{1}{R_E C_E} \times \frac{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) R_E}{R_{\acute{e}q}} \\ = \omega_1 \times \left(1 + \frac{(\beta + 1) R_E}{R_{\acute{e}q}} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte de l'expression de la tension e en fonction de l'entrée v_e , nous obtenons :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R_P}{R_P + R_g} \times \frac{-\beta R_C}{R_{\acute{e}q} + (\beta + 1) R_E} \times \frac{1 + j \frac{f}{f_1}}{1 + j \frac{f}{f_2}}$$

Le gain peut donc se mettre sous la forme :

$$A_V = \frac{v_s}{v_e} = -A_m \times \frac{1 + j \frac{f}{f_1}}{1 + j \frac{f}{f_2}}$$

avec A_m réel positif indépendant de la fréquence et $f_2 > f_1$.

c) Diagramme de Bode du gain

En l'absence du condensateur C_E , nous pouvons établir l'expression de l'amplification :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{-\beta R_C}{r_{BE} + (\beta + 1) R_E} \times \frac{R_p}{R_p + R_g}$$

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\frac{-\beta}{r_{BE}} \cdot R_C}{1 + \frac{\beta}{r_{BE}} \cdot R_E} \times \frac{R_p}{R_p + R_g} = \frac{-g_m R_C}{1 + g_m R_E} \times \frac{R_p}{R_p + R_g}$$

où g_m est la pente ou transconductance du transistor. Nous pouvons trouver une valeur approchée de g_m : à la température ambiante, $g_m = 36 I_{C0}$; I_{C0} représente le courant de polarisation du transistor ou courant du point de fonctionnement.

Si nous considérons maintenant le condensateur comme un court-circuit, l'expression de l'amplification devient :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{-\beta R_C}{h_{11}} = -g_m R_C$$

Dans la pratique, pour des fréquences supérieures à une fréquence minimale, le condensateur pourra être considéré comme idéal et la deuxième expression sera valide ; au contraire pour des fréquences inférieures à une fréquence maximale, le condensateur est considéré comme un circuit ouvert et la première expression est valide.

Pour tracer le diagramme asymptotique, nous distinguons 3 zones :

- $f \ll f_1 \Rightarrow \frac{v_s}{v_e} \approx -A_m$
- $f_1 \ll f \ll f_2 \Rightarrow \frac{v_s}{v_e} \approx -A_m \times j \frac{f}{f_1}$
- $f \gg f_2 \Rightarrow \frac{v_s}{v_e} \approx -A_m \times \frac{f_2}{f_1} = A_M$ avec : $A_M > A_m$

Nous pouvons calculer le courant de polarisation I_{C0} . Nous appliquons à l'entrée le théorème de Thévenin équivalent.

$$E_{TH} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_{CC} = 2 \text{ V} ; \quad R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 8,33 \text{ k}\Omega$$

Nous appliquons le générateur de Thévenin équivalent à l'entrée du transistor, nous trouvons :

$$E_{TH} = R_{TH} \times \frac{I_{CO}}{\beta} + V_{BE0} + R_E I_{CO}$$

soit :

$$I_{C0} = 1,2 \text{ mA}$$

La résistance r_{BE} de la jonction base-émetteur est la résistance dynamique d'une diode.

$$r_{BE} \approx \frac{26}{I_{B0}} \times 10^{-3} = \frac{26}{I_{C0}} \times 10^{-3} \times \beta = 2,16 \text{ k}\Omega$$

$$R_{\text{eq}} = 2,16 \text{ k}\Omega + \frac{3 \times 8,33}{3 + 8,33} \text{ k}\Omega = 4,56 \text{ k}\Omega$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_E C_E} = 159 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_2 = f_1 \times \left(1 + \frac{(\beta + 1)R_E}{R_{\text{eq}}}\right) = 3680 \text{ Hz}$$

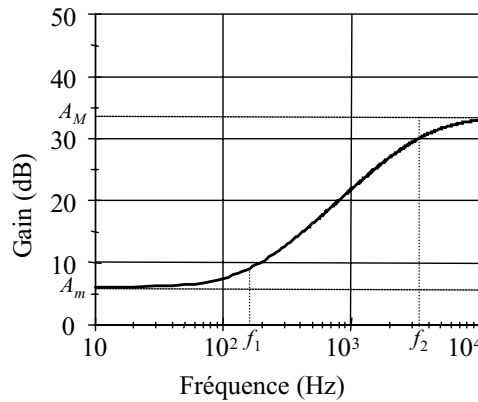


Figure 6.10 Courbe de Bode du gain en fonction de la fréquence.

Le gain obtenu en utilisant les formules précédentes donne une première asymptote horizontale à 6,4 dB et une deuxième asymptote horizontale à 33,7 dB. Il est à remarquer que le gain A_m est le gain obtenu en l'absence du condensateur de découplage C_E et que A_M est obtenu en remplaçant le condensateur de découplage par un court-circuit. Nous remarquons également que :

$$\frac{A_M}{A_m} = \frac{f_2}{f_1}$$

Il s'agit d'un système de premier ordre. La détermination de la fréquence de coupure à -3 dB devient simple dans le cas où $f_2 \gg f_1$, la fréquence pour laquelle le gain chute de 3 décibels est voisine de f_2 .

Bien que R et C soient en parallèle, nous remarquons que l'expression de la fréquence de coupure à -3 dB n'est pas : $1/2\pi RC$

6.3.2 Transistor FET en drain commun

Nous supposons que les condensateurs de liaison C_1 et C_2 ont des valeurs de capacités très élevées, et se comportent de ce fait comme des courts-circuits à la fréquence de travail considérée. $R_G = 1 \text{ M}\Omega$, $R_g = 3 \text{ k}\Omega$,

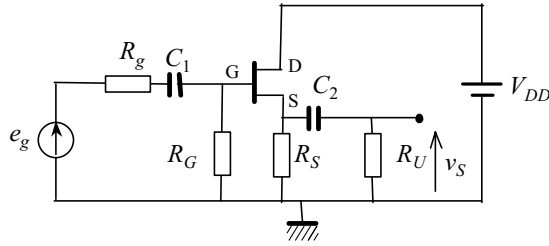


Figure 6.11 Transistor FET en drain commun

Nous cherchons à déterminer le gain en tension à vide A_{V0} , le gain en tension en charge A_V , l'impédance d'entrée Z_e et l'impédance de sortie Z_S .

a) Schéma équivalent

Nous remplaçons le transistor par son schéma équivalent et nous court-circuitons la source de tension V_{DD} . Nous obtenons le schéma équivalent du montage donné à la figure 6.12.

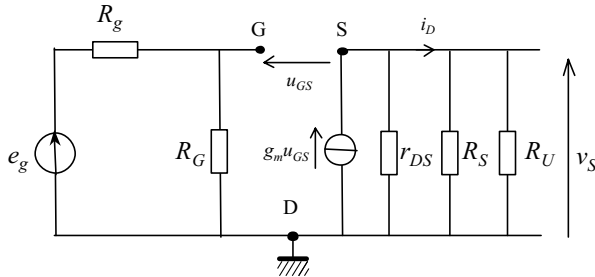


Figure 6.12 Schéma équivalent du montage drain commun.

Le schéma équivalent est valable aux fréquences faibles et moyennes. Les condensateurs de liaison C_1 et C_2 sont considérés comme des courts-circuits à la fréquence de travail. Le drain qui est relié à la borne positive (+) de l'alimentation se trouve à la masse en alternatif (l'alimentation est remplacée par un court-circuit).

b) Gain en tension à vide

Nous notons la conductance de source G_S et la conductance drain-source g_{ds} :

$$G_S = \frac{1}{R_S} \quad \text{et} \quad g_{ds} = \frac{1}{r_{ds}}$$

À vide, la résistance d'utilisation R_U est infinie, le courant i_D est le même courant qui passe dans la résistance de source R_S . En effet, l'impédance d'entrée étant considérée

comme infinie, le courant de grille i_g est nul :

$$\begin{aligned} i_d &= G_S u_{sd} = g_m u_{gs} - g_{ds} u_{sd} = g_m (u_{gd} - u_{sd}) - g_{ds} u_{sd} \\ (G_S + g_m + g_{ds}) u_{sd} &= g_m u_{gd} \\ A_{v_0} &= \frac{u_{sd}}{u_{gd}} = \frac{g_m}{G_S + g_m + g_{ds}} = \frac{g_m R_S}{1 + (g_m + g_{ds}) R_S} \end{aligned}$$

La résistance R_G étant de 1 M Ω , et R_g de 3 k Ω , toute la tension se trouve pratiquement à l'entrée : $v_e = u_{GD}$, l'amplification à vide A_{V0} devient :

$$\begin{aligned} i_d &= G_S u_{sd} = g_m u_{gs} - g_{ds} u_{sd} = g_m (u_{gd} - u_{sd}) - g_{ds} u_{sd} \\ (G_S + g_m + g_{ds}) u_{sd} &= g_m u_{gd} \\ A_{v_0} &= \frac{u_{sd}}{u_{gd}} = \frac{g_m}{G_S + g_m + g_{ds}} = \frac{g_m R_S}{1 + (g_m + g_{ds}) R_S} \end{aligned}$$

Généralement, g_{DS} est nettement plus petit que g_m et que G_S , l'amplification A_{V0} devient :

$$A_{V0} = \frac{g_m}{G_S + g_m} = \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S}$$

Nous retrouvons le résultat d'un amplificateur en drain commun qui est l'équivalent du collecteur commun pour les transistors bipolaires. A_{V0} est d'autant plus proche de 1 que $g_m R_S$ est grand devant 1, c'est-à-dire que g_m est élevé (point de repos proche de $U_{GS} = 0$, I_{DSS}) et (ou) que R_S est élevée.

c) Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée du transistor seul étant considérée comme infinie, nous voyons que l'impédance d'entrée du montage est simplement égale à R_G .

d) Impédance de sortie

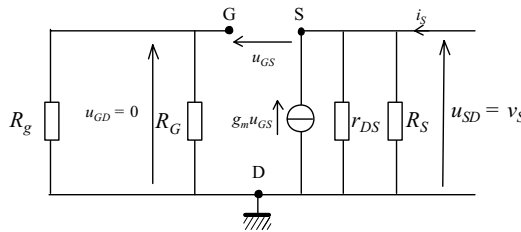


Figure 6.13 Principe du calcul de l'impédance de sortie.

La résistance entre G et S étant infinie, il n'y a aucune réaction de la sortie sur l'entrée et la tension entre la grille et le drain est nulle : $u_{GD} = 0$, ce qui fait que : $u_{GS} = -u_{SD}$.

Le courant i_s débité par un générateur alternatif mis en sortie est :

$$i_s = G_S u_{sd} + g_{ds} u_{sd} - g_m u_{gs} = (G_S + g_{ds} + g_m) u_{sd}$$

L'admittance de sortie est :

$$Y_s = \frac{i_s}{u_{sd}} = G_S + g_{ds} + g_m \approx G_S + g_m$$

Dans le cas particulier : $g_m R_S \gg 1$, soit $g_m \gg G_S$, alors $Y_s = g_m$.

e) Gain en charge

L'amplificateur se met sous la forme d'un quadripôle avec une impédance d'entrée Z_e , une impédance de sortie Z_S et une source de tension commandée en tension $A_{V0}u_{GS}$.

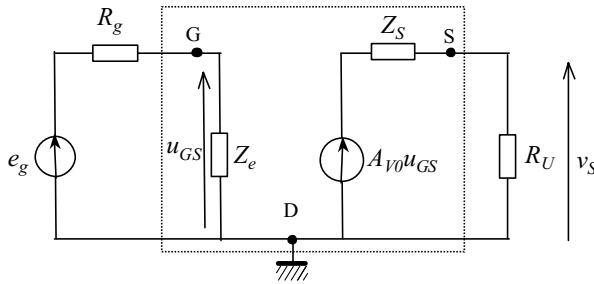


Figure 6.14 Schéma équivalent de l'amplificateur.

Le gain en charge devient :

$$A_V = \frac{v_S}{u_{GS}} \times \frac{u_{GS}}{e_g} = \frac{R_U}{R_U + Z_S} \times A_{V0} \times \frac{Z_e}{Z_e + R_g}$$

$$A_V = \frac{R_U}{R_U + Z_S} \times \frac{Z_e}{Z_e + R_g} \times \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S}$$

6.4 L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

L'amplificateur opérationnel est devenu un composant de base utilisé pratiquement partout en électronique. Souvent, nous utilisons une description idéale de l'amplificateur opérationnel en le supposant parfait.

6.4.1 Structure d'un amplificateur opérationnel

La structure interne de la plupart des amplificateurs opérationnels peut se ramener au schéma simplifié de la figure 6.15.

- Le premier étage a une structure différentielle, c'est-à-dire qu'il délivre en sortie une grandeur proportionnelle à la différence des potentiels des entrées.
- Le second étage amplifie et adapte en impédance la grandeur fournie par le premier étage. Il assure de plus une translation des niveaux continus de façon à ne pas

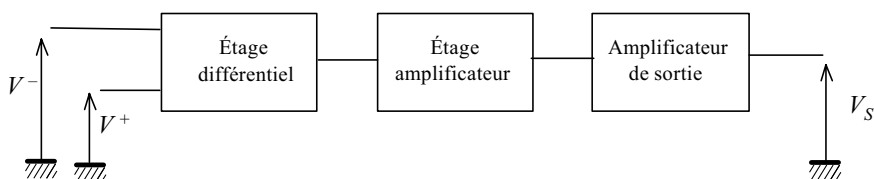


Figure 6.15 Schéma de principe d'un amplificateur opérationnel.

limiter l'excursion des signaux, et imposer une tension V_s nulle lorsque l'écart $(V^+ - V^-)$ est nul. Cette translation est indispensable puisque les liaisons entre les différents étages laissent passer les signaux continus.

- Enfin l'étage de sortie permet de fournir V_s avec une impédance de sortie faible.

Cette présentation va nous permettre de comprendre la signification physique de certains paramètres qui permettent généralement de caractériser les performances d'un amplificateur opérationnel. Citons par exemple :

- l'amplification en boucle ouverte A_{v0} ;
- l'impédance d'entrée Z_e et l'impédance de sortie Z_s ;
- le taux de réjection en mode commun ;
- la fréquence de transition f_T ;
- le slew-rate qui caractérise la vitesse maximale de l'évolution de la sortie.

L'amplificateur opérationnel est un composant de l'électronique qui résulte de l'intégration de plusieurs étages amplificateurs dans un même boîtier. Il comporte généralement deux entrées, appelées respectivement *entrées inverseuse* (-) et *non inverseuse* (+), et une seule sortie.

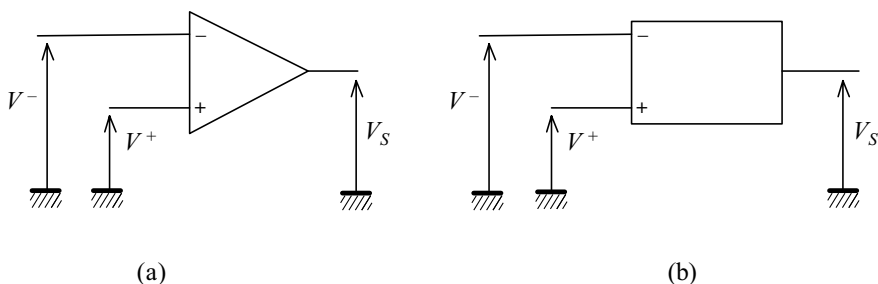


Figure 6.16 Symbole d'un amplificateur opérationnel.

Du point de vue fonctionnel, la tension est proportionnelle à la différence de potentiel qui existe entre les deux bornes d'entrée, ce qui s'exprime par la relation :

$$V_s = A_d (V^+ - V^-)$$

A_d est appelé *amplification différentielle*. En pratique la valeur de ce coefficient multiplicatif est de plusieurs centaines de milliers.

Si l'une des entrées sert de référence de potentiel, la sortie est en phase (si $V^- =$ référence) ou en opposition de phase (si $V^+ =$ référence). Le signe « - » qui peut affecter le gain indique une opposition de phase entre la sortie et l'entrée.



Remarque : Afin de permettre l'obtention des tensions de sortie positive et négative, l'alimentation en énergie de l'amplificateur opérationnel s'effectue souvent de façon symétrique ($+V_{CC}$ et $-V_{CC}$).

L'étude des applications de l'amplificateur se fait très simplement à partir d'un modèle idéalisé. En cas de nécessité, des corrections peuvent ensuite être apportées afin de tenir compte des caractéristiques réelles de l'amplificateur opérationnel.

6.4.2 Schéma équivalent en petits signaux

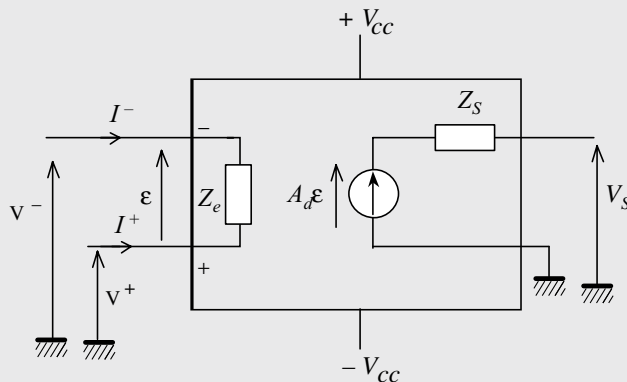


Figure 6.17 Amplificateur opérationnel sous forme d'un quadripôle.

L'amplificateur opérationnel est assimilé à un quadripôle, ce dernier étant introduit dans un réseau linéaire de préférence (mais il n'en va pas toujours ainsi). Les méthodes générales d'études des réseaux s'appliquent donc.

Pour l'amplificateur opérationnel idéal, les équations obtenues sont en général simples du fait de ses propriétés.

Le modèle de l'amplificateur opérationnel idéal se décrit à l'aide des relations :

$$A_d \rightarrow \infty ; \quad Z_e \rightarrow \infty ; \quad Z_s \rightarrow 0 \quad \text{et une bande passante infinie}$$

- l'amplification différentielle étant infinie (infiniment grande en réalité), si la tension de sortie V_s reste dans la zone linéaire de fonctionnement (V_s comprise entre les tensions d'alimentation $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$), il en résulte que la différence de potentiel : $\epsilon = 0$. À la limite, nous supposons que : $V^+ = V^-$;

- l'impédance d'entrée Z_e infinie implique que les courants : $I^+ = I^- = 0$;
- une impédance de sortie nulle permet de placer en sortie une charge de valeur quelconque sans que la tension V_S soit affectée par la valeur de la charge en sortie.

6.4.3 Caractéristiques de l'amplificateur opérationnel

a) La tension de décalage

Souvent la tension de sortie V_S est nulle lorsque ε est différent de 0. Cette valeur particulière est appelée tension de décalage. Elle correspond à la tension d'entrée qu'il faut appliquer pour que la sortie soit nulle.

La tension de décalage résulte soit d'un défaut de symétrie dans l'étage différentiel, soit d'un défaut dans les étages amplificateurs. En pratique, la tension de décalage est de quelques millivolts.

b) Les courants de polarisation d'entrée

L'étage différentiel d'entrée nécessite pour son fonctionnement des courants d'entrée circulant, en général, dans le même sens pour les deux entrées (à cause de la symétrie de l'étage).

L'importance de ces courants dépend principalement de la nature des transistors utilisés. Les courants d'entrées doivent être les plus faibles possibles. C'est pour cette raison que nous utilisons une paire différentielle en Darlington ou mieux des transistors à effet de champ qui sont connus pour avoir des résistances d'entrée trop élevées et des courants d'entrée quasi nuls. Le constructeur indique toujours la différence entre les courants de base pour une tension nulle.

c) Résistance d'entrée et résistance de sortie

La résistance d'entrée différentielle est la résistance vue du côté entrée. Cette résistance est assez élevée, de l'ordre du $M\Omega$. Une capacité parasite des jonctions se trouve aussi à l'entrée et sa valeur est de l'ordre du pF.

La résistance de sortie de l'amplificateur opérationnel qui est la résistance de sortie du dernier étage peut être calculée : son ordre de grandeur est la dizaine de Ω .

d) Amplification différentielle

L'amplification différentielle A_d de l'amplificateur opérationnel est de l'ordre de centaines de mille. Comme dans tous les systèmes physiques, l'amplification A_d est limitée en fréquence. La loi d'évolution de l'amplification différentielle en fonction de la fréquence est une caractéristique importante des amplificateurs opérationnels.

L'amplificateur opérationnel est généralement utilisé avec une contre-réaction. Une fraction de la tension de sortie est alors injectée à l'entrée ; le montage risque d'osciller.

Pour éviter l'instabilité, nous modifions la courbe de réponse comme indiquée à la figure 6.18, en introduisant un condensateur C à l'entrée du premier étage, ou entre le premier et le second étage. C'est ce que nous appelons la compensation en fréquence. La courbe de l'amplification en fonction de la fréquence coupe l'axe des fréquences à f_T . Cette fréquence pour laquelle l'amplification devient égale à l'unité, s'appelle la fréquence de transition f_T .

Il existe donc deux grandes familles d'amplificateurs opérationnels :

- Ceux qui disposent de circuit dit « de compensation interne ». La loi d'évolution correspond alors à celle d'un circuit du premier ordre.
- Ceux dont la loi d'évolution en fréquence est modifiable par un réseau externe. Pour ces amplificateurs, il faut optimiser le circuit externe en fonction de l'application.

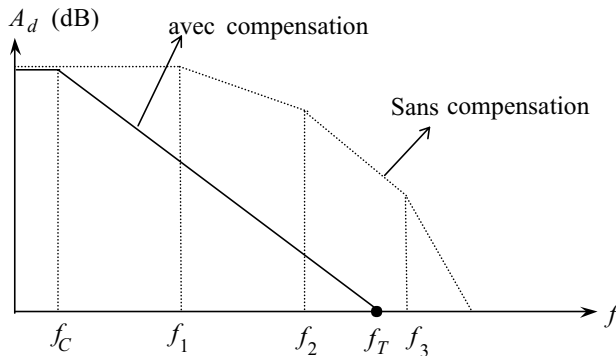


Figure 6.18 Réponse en fréquence sans compensation et avec compensation.

6.4.4 Réponse indicielle en petits signaux

Dans le cas de l'amplificateur opérationnel, grâce au condensateur de compensation, nous avons un filtre du premier ordre. Le temps de montée devient :

$$t_r = \frac{2,2}{2\pi f_{C0}} = 2,2 RC$$

f_{C0} est la fréquence de coupure du montage avec contre-réaction. Pour un gain égal à 10 par exemple, nous obtenons f_{C0} égale à 100 kHz et le temps de montée est de $3,5 \mu s$.

6.4.5 Réponse indicielle en grands signaux

En grands signaux, la réponse indicielle est très différente de la réponse précédente. Après un temps de retard, la tension V_s évolue linéairement vers sa valeur finale. La

pente représente sa vitesse maximale d'évolution. C'est une caractéristique très importante des amplificateurs opérationnels. La tension de sortie présente des portions sensiblement linéaires dont la pente dV_s/dt est indépendante du gain du montage. La caractéristique la plus importante est la vitesse maximale de variation de la tension de sortie en réponse à un échelon de tension. Son nom est souvent donné en anglais : « slew rate ».

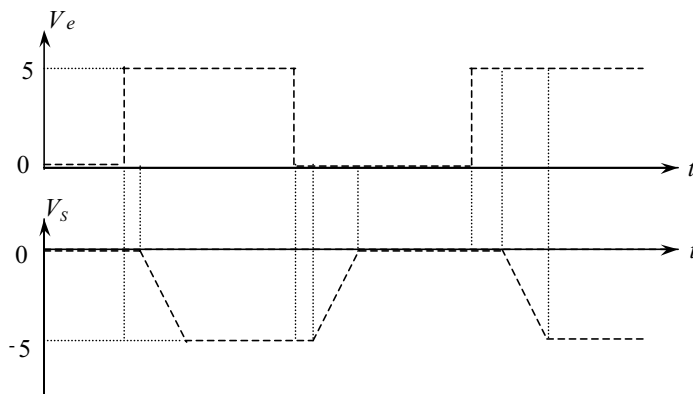


Figure 6.19 Réponse indicielle en grands signaux : cas d'un montage inverseur de gain « -1 ».

6.4.6 Rapport de réjection en mode commun

Si l'amplificateur était parfait lorsque $V^+ = V^-$, la sortie devrait être nulle.

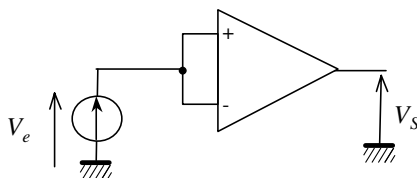


Figure 6.20 Méthode de mesure de la réjection en mode commun.

En pratique, si nous réalisons le montage $V_e = V^+ = V^-$, nous observons une tension de sortie V_s proportionnelle à V_e . Nous définissons alors une amplification en mode commun (puisque V^+ est commun à V^-).

En fonctionnement normal, la sortie V_s dépend donc de deux termes :

- le terme différentiel : $V_s = A_d (V^+ - V^-)$;
- le terme de mode commun : $V_s = A_{mc} V_e$.

Une caractéristique importante de l'amplificateur est le rapport de ces amplifications appelé rapport de réjection en mode commun (RRMC). En pratique, nous exprimons souvent ce rapport en décibels soit :

$$\text{RRMC} = 20 \log \left(\frac{A_{mc}}{A_d} \right)$$

L'ordre de grandeur du RRMC est de 100 dB.

6.5 APPLICATIONS DE L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

Les amplificateurs opérationnels sont de plus en plus utilisés dans les domaines les plus variés. Nous pouvons classer leurs applications en deux familles de montage qui se subdivisent suivant les grands thèmes de l'électronique : Les montages linéaires comme les amplificateurs, les filtres ou encore les convertisseurs, et les montages non linéaires.

Seuls, les montages linéaires sont étudiés dans ce chapitre. L'amplificateur opérationnel n'est jamais utilisé seul. Il est toujours associé à un réseau qui introduit une réaction comme dans les systèmes bouclés. Dans la suite de ce chapitre nous n'utiliserons que des amplificateurs opérationnels idéaux qui sont caractérisés par :

- un gain en tension différentiel infini : $A_d = \infty$;
- une impédance d'entrée infinie : $Z_E = \infty$;
- une impédance de sortie nulle : $Z_S = 0$;
- une bande passante infinie : $BP = \infty$.

6.5.1 L'amplificateur inverseur

Considérons le montage de la figure 6.21, le potentiel V^+ étant nul, comme $\varepsilon = 0$, le potentiel V^- est également nul aussi (masse virtuelle). Le courant I_1 qui passe dans la résistance R_1 est égal au courant I_2 qui passe dans la résistance R_2 puisque le courant I^- qui entre dans l'entrée « - » de l'amplificateur opérationnel est nul.

Il en résulte :

$$\begin{cases} V_E = R_1 I_1 \\ V_S = -R_2 I_2 \end{cases} \Rightarrow A_V = -\frac{R_2}{R_1}$$

Nous remarquons que l'amplification est fixée par un rapport de deux résistances externes dans le cas d'un amplificateur opérationnel idéal. L'impédance d'entrée est donnée par $Z_e = R_1$ et l'impédance de sortie est nulle.

Ce montage avec contre-réaction de tension en courant donne les résultats suivants :

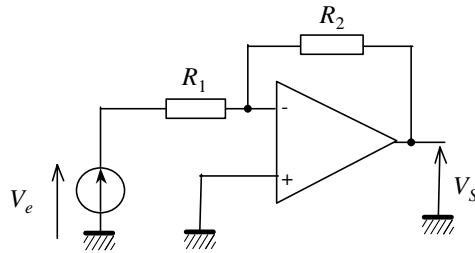


Figure 6.21 Montage amplificateur inverseur.

L'amplification
$$A_V = \frac{V_S}{V_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

l'impédance d'entrée
$$Z_e = R_1 + \frac{Z_0 + R_2}{A_0} \approx R_1$$

L'impédance de sortie
$$Z_S = Z_0 \frac{A}{A_0} \quad \text{très faible}$$

Pour équilibrer les courants d'entrée, nous plaçons généralement une résistance R_3 dans l'entrée non inverseuse, de valeur telle que chaque entrée soit attaquée par la même impédance : $R_3 = R_1 / R_2$.

Le signe « - » de la formule du gain indique une opposition de phase entre la tension de sortie et celle d'entrée d'où le nom donné à ce montage.

6.5.2 L'amplificateur non inverseur

Considérons maintenant le montage de la figure 6.22.

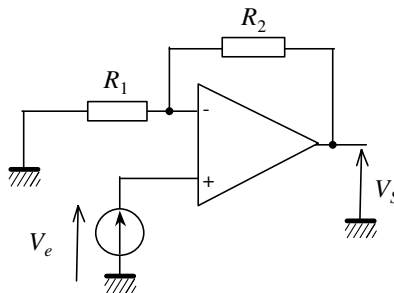


Figure 6.22 Montage amplificateur non inverseur.

Nous appliquons le diviseur de tension sur l'entrée « - » et nous avons directement la tension v_E sur l'entrée « + ».

Or

$$V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S \quad (i^+ = i^- = 0)$$

et

$$V^- = V_E$$

d'où

$$A_V = \frac{V_S}{V_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Il s'agit d'une contre-réaction de tension en tension. Nous obtenons :

L'amplification $A_V = \frac{V_S}{V_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

l'impédance d'entrée $Z_e = Z_i \frac{A_0}{A}$ très grande

L'impédance de sortie $Z_S = Z_0 \frac{A}{A_0}$ très faible

Nous remarquons que la tension de sortie et la tension d'entrée sont en phase et que l'amplification est toujours supérieure à l'unité. Le montage se comporte donc comme un véritable amplificateur.

Un cas particulier de ce montage consiste à annuler la résistance R , ce qui permet d'avoir une amplification égale à l'unité. C'est le montage suiveur qui est souvent utilisé comme adaptateur d'impédance avec une résistance d'entrée très élevée (infinie) et une résistance de sortie très faible (nulle).

Avec ce montage, le gain est toujours supérieur à l'unité et l'impédance d'entrée est infinie. Pour obtenir un gain inférieur à un, il suffit de placer à l'entrée un pont atténuateur.

6.5.3 Montage sommateur non inverseur : additionneur

Nous disposons de deux tensions V_1 et V_2 et considérons le montage de la figure 6.23. Le théorème de superposition donne :

$$V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 = k_1 V_1 + k_2 V_2$$

V' est la somme pondérée des tensions V_1 et V_2 avec des coefficients de pondération k_1 et k_2 qui sont positifs.

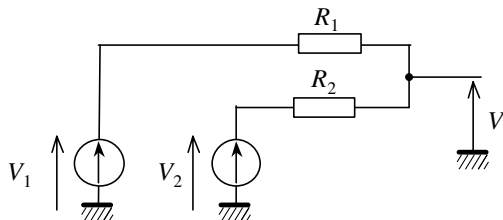


Figure 6.23 Principe de l'addition.

En associant le montage précédent à un amplificateur opérationnel monté en non inverseur d'amplification G comme indiquée à la figure 6.24, la tension de sortie devient :

$$V_S = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \right) \left(1 + \frac{R}{R'} \right) = G (k_1 V_1 + k_2 V_2)$$

Cas particulier : $R_1 = R_2$ et $R' = R$, nous avons : $V_S = V_1 + V_2$.

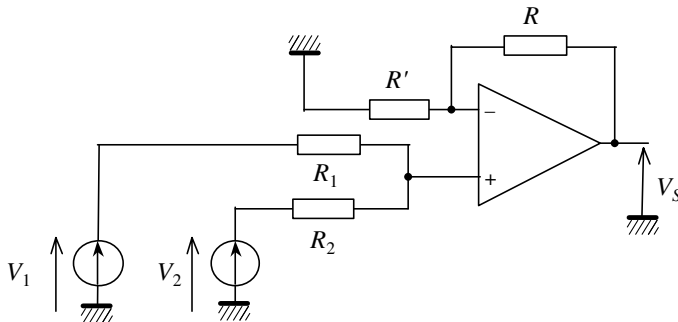


Figure 6.24 Cas du montage additionneur.

6.5.4 Le montage soustracteur

Avec le même montage que précédemment, en injectant une tension à travers R' comme indiquée sur figure 6.25, et grâce au théorème de superposition on peut écrire :

$$V_S = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \times \left(1 + \frac{R}{R'} \right) \times V_1 + \left(-\frac{R}{R'} \right) \times V_2 = k_1 V_1 - k_2 V_2$$

La tension de sortie est égale à la différence pondérée de V_1 et V_2 .

Cas particulier : $R_1 = R_2$ et $R' = R$, nous avons : $V_S = V_1 - V_2$

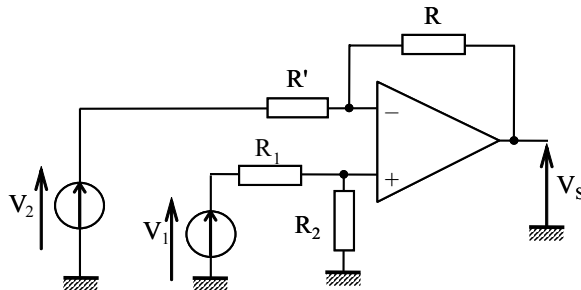


Figure 6.25 Montage soustracteur.

6.5.5 Le montage intégrateur

Si nous remplaçons la résistance R_2 par un condensateur dans le montage amplificateur inverseur, nous obtenons un montage appelé intégrateur.

Le courant d'entrée de l'amplificateur opérationnel étant nul, le courant I qui passe dans la résistance R est le même qui parcourt le condensateur. Il en résulte :

$$\begin{cases} I = \frac{V_e(t)}{R} = -C \frac{dV_S}{dt} \\ V_S(t) = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t V_e(t) dt \end{cases}$$

La tension de sortie est proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée. Nous disons que le montage est intégrateur. En régime établi, la fonction de transfert devient :

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

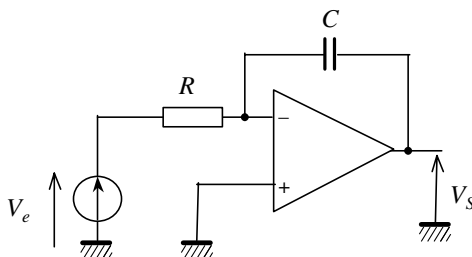


Figure 6.26 Montage intégrateur.

Le diagramme de Bode en amplitude devient :

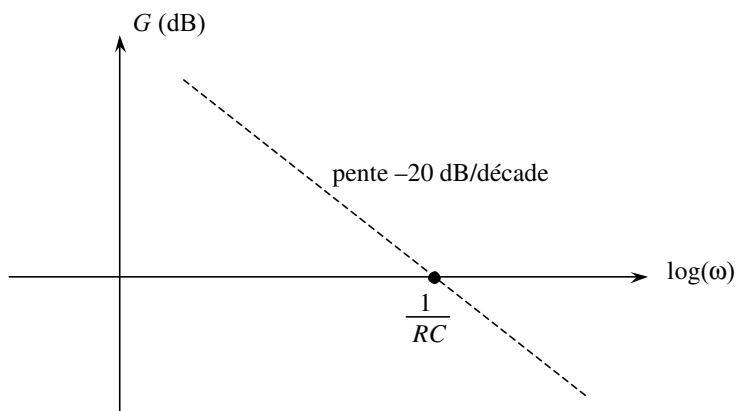


Figure 6.27 Diagramme de Bode en amplitude d'un intégrateur.



Remarque : Ce montage est en boucle ouverte pour le continu et il risque de ne pas fonctionner correctement. Généralement, nous ajoutons une résistance de forte valeur aux bornes du condensateur ($R' = 1 \text{ M}\Omega$ par exemple). Le diagramme de Bode en amplitude devient comme indiqué à la figure 6.28.

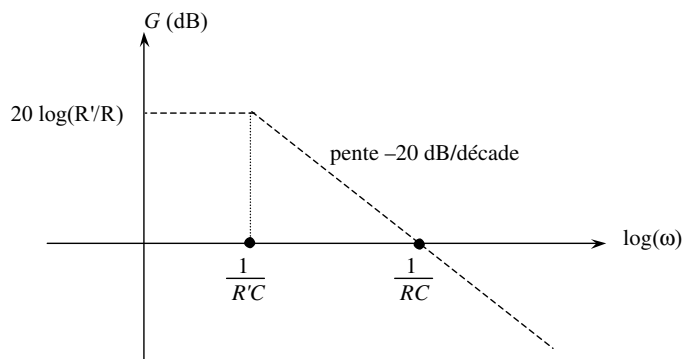


Figure 6.28 Diagramme de Bode d'un pseudo-intégrateur.

6.5.6 Le montage dérivateur

Pour le montage dérivateur, nous procédons de la même façon que pour le montage intégrateur, d'où :

$$V_s = -RC \frac{dV_e}{dt}$$

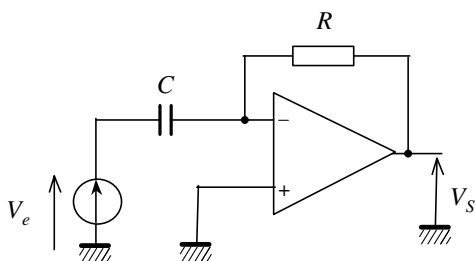


Figure 6.29 Montage dérivateur.

6.5.7 Les filtres actifs

L'une des applications les plus importantes des amplificateurs opérationnels consiste à réaliser des filtres actifs en utilisant uniquement des résistances et des condensateurs. Cette façon de réalisation permet d'éviter d'avoir recours à des bobines qui sont encombrantes et de prix de revient élevé.

Il existe quatre principaux types de filtre selon les fréquences éliminées : nous trouvons des filtres passe-bas, des filtres passe-haut, des filtres passe-bande et des filtres coupe-bande.

Plusieurs fonctions mathématiques permettent d'obtenir une courbe de réponse proche de la courbe idéale. Ce sont les approximations de Butterworth, Tchebycheff, Cauer, etc.

Un filtre peut être obtenu en associant des circuits simples d'ordre 1 ou d'ordre 2. Parmi les structures les plus intéressantes, nous pouvons étudier à titre d'exemple, la structure de Rauch et la structure de Sallen-Key.

a) Circuit à réaction multiple ou structure de Rauch

Soit le montage de la figure 6.30.

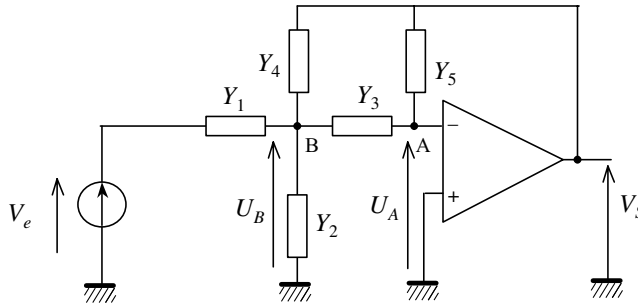


Figure 6.30 Structure de Rauch.

En appliquant le théorème de Millman au nœud B, nous avons :

$$V_B = \frac{V_e \cdot Y_1 + V_S \cdot Y_4 + V_A \cdot Y_3 + 0 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

Puisque l'entrée + de l'amplificateur opérationnel est à la masse, le potentiel du point A qui est le même potentiel que celui de l'entrée - est donc nul.

$$V_A = 0 = \frac{V_S Y_5 + V_B Y_3}{Y_2 + Y_5}$$

$$V_S Y_5 + V_B Y_3 = 0 \quad \text{donne :} \quad V_B = -\frac{V_S Y_5}{Y_3}$$

En remplaçant dans la première équation V_B par sa nouvelle expression, nous trouvons :

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Cette formule est tout à fait générale et nous pouvons fixer les admittances suivant le type de la fonction de transfert à réaliser. Si nous désirons par exemple un filtre passe

bas, du second ordre dont la fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante à une constante multiplicatrice près :

$$H(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}$$

Le numérateur doit être indépendant de p , ce qui revient à imposer Y_1 et Y_3 comme des conductances pures de valeurs $Y_1 = 1/R_1$ et $Y_3 = 1/R_3$. Pour le dénominateur, le terme en p^2 ne peut être Y_3Y_4 puisque Y_3 est indépendant de p . Les seuls produits qui restent font intervenir Y_5 qui doit être forcément dû à un condensateur. Dans ce cas, seul le produit Y_3Y_4 permet de retrouver le terme c qui représente une constante indépendante de p , Y_4 est forcément une conductance et on peut déduire que Y_2 est dû à un condensateur. Nous arrivons à Y_1, Y_3 et Y_4 des conductances et $Y_2 = C_1p$ et $Y_5 = C_2p$.

b) Filtre à amplificateur commandé ou structure de Sallen et Key

Cette structure nécessite très peu de composants. Nous utilisons une source de tension commandée en tension et nous supposons que le gain k est positif. Nous pouvons par exemple choisir k égal à l'unité ce qui aura comme avantage une augmentation de la fréquence limite utilisable par l'amplificateur opérationnel.

Dans le montage ci-dessous, l'amplificateur de gain K a une impédance d'entrée infinie. Il est réalisé, par exemple avec un amplificateur opérationnel monté en amplificateur non inverseur. Les tensions au nœud A et au nœud B se calculent comme dans le montage précédent à l'aide du théorème de Millman ou en utilisant les lois des nœuds.

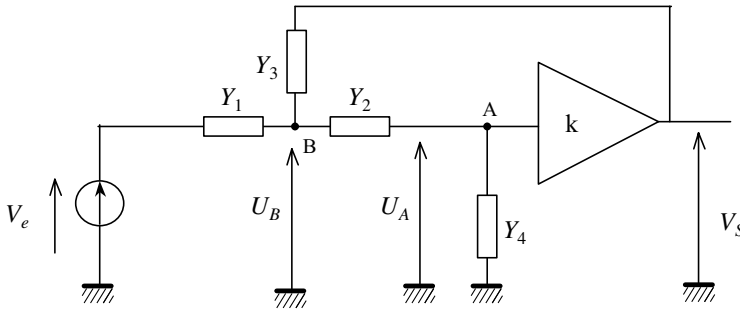


Figure 6.31 Structure de Sallen et Key.

En notant U_A et U_B les tensions par rapport à la masse du nœud A et du nœud B, puisque l'amplificateur a un gain K et une impédance d'entrée infinie, il advient :

- au nœud B : $Y_1 (V_e - U_B) + Y_2 \left(\frac{V_S}{K} - U_B \right) + Y_3 (V_S - U_B) = 0$;
- au nœud A : $Y_2 \left(U_B - \frac{V_S}{K} \right) + Y_4 \left(0 - \frac{V_S}{K} \right) = 0$;

dont il résulte :

$$\frac{V_S}{V_e} = K \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 (1 - K) + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4}$$

6.6 CONTRE RÉACTION APPLIQUÉE À L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

6.6.1 Définition

Un système de contrôle par réaction négative ou par contre réaction est un système qui comporte trois organes :

- Une chaîne directe ou chaîne d'action de fonction de transfert A. Il s'agit souvent d'un quadripôle amplificateur.
- Une chaîne de retour ou boucle de réaction de fonction de transfert B. Il s'agit souvent d'un circuit passif composé de résistances.
- Un comparateur négatif qui réalise la différence entre la grandeur d'entrée externe x_e et la grandeur de sortie x_r et la grandeur de sortie : $\varepsilon = x_e - x_r$

Cette combinaison qui modifie les performances du montage est représentée par :

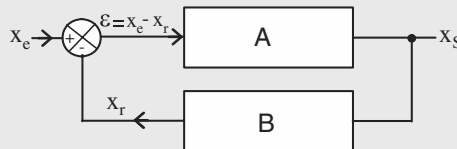


Figure 6.32 Schéma de principe de la contre réaction.

En régime linéaire, la fonction de transfert du système bouclé est : $H = \frac{x_s}{x_e} = \frac{A}{1 + AB}$

6.6.2 Types de contre réaction

Quatre modes de contre réaction sont possibles selon qu'on prélève la tension v_s (prélèvement en parallèle) ou le courant i_s (prélèvement en série). On réinjecte la grandeur de sortie de la chaîne de retour v_r (en parallèle) ou i_r (en série). On suppose que la chaîne de retour ne charge pas la chaîne directe, ce qui revient à négliger le courant qui passe dans B pour une tension prélevée et négliger la tension d'entrée de B pour un courant prélevé.

Comparé aux caractéristiques de l'amplificateur A seul, la contre réaction modifie le gain, l'impédance d'entrée, l'impédance de sortie et la bande passante.

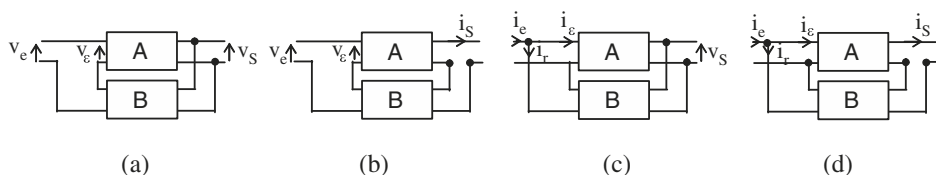


Figure 6.33 Schéma de principe des quatre types de contre réaction.

Type de contre réaction	Série-parallèle tension-tension	Série-série tension-courant	Parallèle-parallèle courant-tension	Parallèle-série Courant-courant
Schéma	6.33 (a)	6.33 (b)	6.33 (c)	6.33 (d)
Signal prélevé	v_S	i_S	v_S	i_S
Signal réinjecté	$v_r = Bv_S$	$v_r = Bi_S$	$i_r = Bv_S$	$i_r = Bi_S$
erreur	$\varepsilon = v_e - v_r$	$\varepsilon = v_e - v_r$	$\varepsilon = i_e - i_r$	$\varepsilon = i_e - i_r$
Fonction réalisée	Amplificateur de tension	Convertisseur tension-courant	Convertisseur courant-tension	Amplificateur de courant
Impédance d'entrée	$Z'_e \approx Z_e (1 + AB)$	$Z'_e = Z_e (1 + AB)$	$Z'_e \approx \frac{Z_e}{1 + AB}$	$Z'_e = \frac{Z_e}{1 + AB}$
Impédance d'entrée	$Z'_S = \frac{Z_S}{1 + AB}$	$Z'_S \approx Z_S (1 + AB)$	$Z'_S = \frac{Z_S}{1 + AB}$	$Z'_S \approx Z_S (1 + AB)$
Gain	$H = \frac{A}{1 + AB}$	$H = \frac{A}{1 + AB}$	$H = \frac{A}{1 + AB}$	$H = \frac{A}{1 + AB}$
Bande passante	$B'_p = B_p (1 + AB)$	$B'_p = B_p (1 + AB)$	$B'_p = B_p (1 + AB)$	$B'_p = B_p (1 + AB)$

6.6.3 Applications à l'amplificateur opérationnel

Nous pouvons prendre comme exemples, les deux cas de la figure 6.34.

– On prélève dans le premier cas (6.34 a) une tension V_S et on injecte en entrée une tension V_r qui n'est autre que la tension prélevée et réinjectée à travers le diviseur de tension R_1, R_2 .

$$V_r = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_S$$

La contre réaction est donc de type tension-tension.

– On prélève dans le deuxième cas (6.34 b) une tension V_S et on injecte en entrée un courant I_r qui n'est autre que le rapport de la tension prélevée par la résistance de retour R_2 . En réalité on a :

$$I_r = -\frac{1}{R_2} \times \frac{1 + A_0}{A_0} \approx -\frac{1}{R_2}$$

Souvent nous pouvons considérer logiquement que $1 \ll$ le gain propre de l'amplificateur opérationnel A_0 .

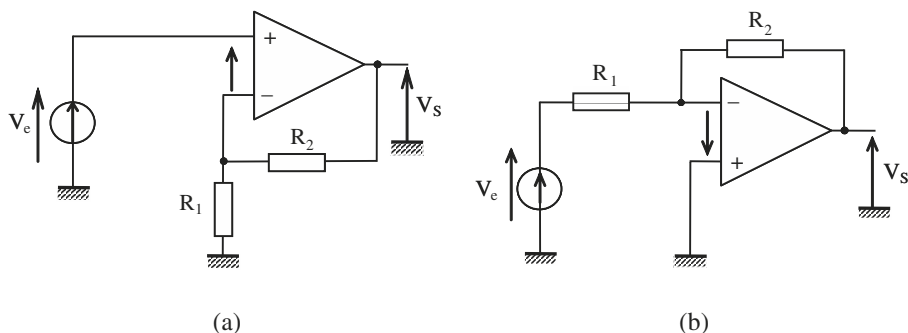


Figure 6.34 Amplificateur avec contre réaction tension-tension (a) et avec contre réaction tension-courant (b).

CE QU'IL FAUT RETENIR

► Les transistors sont des tripôles (trois électrodes) qui se divisent en deux grandes familles :

- les transistors bipolaires constitués d'une zone N (ou P) appelée émetteur, une zone P (ou N) appelée Base et une zone N (ou P) appelée collecteur.
- les transistors à effet de champ (TEC), ou transistors FET. Les trois électrodes sont la source (S), la grille ou porte, appelée aussi en anglais *gate* (G), et le drain (D).

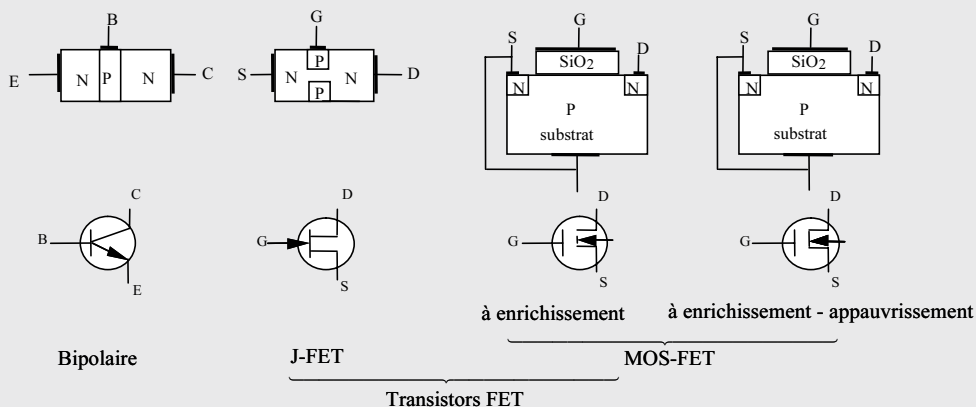


Figure 6.35 Aperçu des différents types de transistors.

► Pour un transistor bipolaire NPN ou PNP on a : $I_C \approx \beta I_B$.

► Le schéma équivalent en petits signaux d'un transistor bipolaire est :

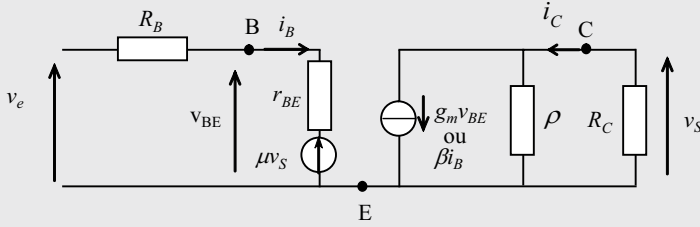


Figure 6.36 Schéma équivalent d'un transistor en utilisant les paramètres universels.

$r_{BE} = h_{11}$: résistance d'entrée à sortie fermée ; $\mu = h_{12}$: coefficient de réaction interne ;

$\beta = h_{21}$ = gain en courant à sortie fermée ; g_m : pente (transconductance) à sortie fermée ;

$\rho = h_{22}$: résistance de sortie à entrée fermée.

► Pour un FET à canal N, lorsque U_{DS} dépasse la tension de pincement U_p , le courant I_D est maximum ($I_D = I_{DSs}$) pour $U_{GS} = 0$, lorsque $U_{GS} < U_p$, l'évolution du courant I_D est :

$$I_D = I_{DSs} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p} \right)^2$$

► Dans la zone de fonctionnement normal du FET (zone de pincement), nous définissons :

– la pente g_m : $g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} = -\frac{2I_{DSs}}{U_p} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p} \right)$, pour $U_{GS} = 0$, g_m est maximale : $g_{m0} = -\frac{2I_{DSs}}{U_p}$

– la résistance drain-source r_{ds} : $r_{ds} = \left(\frac{\Delta U_{DS}}{\Delta I_D} \right)_{U_{GS}=\text{cte}}$

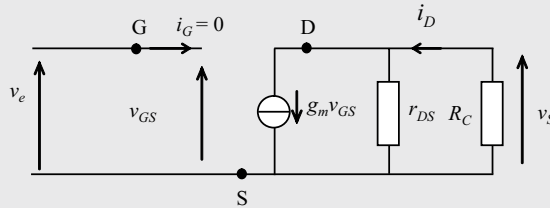


Figure 6.37 Schéma équivalent d'un transistor à effet de champ.

- Un amplificateur opérationnel idéal est un quadripôle qui est décrit par :
- une amplification différentielle infinie (infiniment grande en réalité $A_d \rightarrow \infty$). Il en résulte que la différence de potentiel : $\varepsilon = 0$ ($V_+ = V_-$) ;
 - une impédance d'entrée Z_e infinie (en réalité $Z_e \rightarrow \infty$) ce qui implique : $I^+ = I^- = 0$;
 - une impédance de sortie nulle (en réalité $Z_s \rightarrow 0$) et une bande passante infinie.

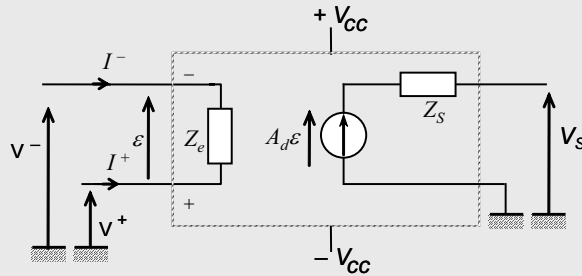


Figure 6.38 Amplificateur opérationnel sous forme d'un quadripôle.

- Un système de contrôle par réaction négative (contre réaction) comporte trois organes : une chaîne directe de fonction de transfert A, une chaîne de retour (réaction) de fonction de transfert B et un comparateur négatif qui réalise la différence entre la grandeur d'entrée externe x_e et la grandeur de sortie x_r et la grandeur de sortie : $\varepsilon = x_e - x_r$

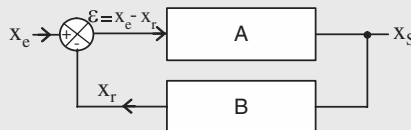


Figure 6.39 Schéma de principe de la contre réaction.

En régime linéaire, la fonction de transfert du système bouclé est : $H = \frac{x_s}{x_e} = \frac{A}{1 + AB}$

Quatre modes de contre réaction sont possibles selon qu'on prélève la tension v_s ou le courant i_s . On réinjecte une tension v_r ou un courant i_r .

EXERCICES

Exercice 6.1 Étude d'un émetteur-commun non découplé

Soit le circuit d'un transistor bipolaire NPN polarisé à sa base par deux résistances R_1 et R_2 ($R_P = R_1 // R_2$), de résistance de collecteur R_C et de résistance d'émetteur R_E non découplée. Le schéma équivalent en petits signaux est donné à la figure 6.40.

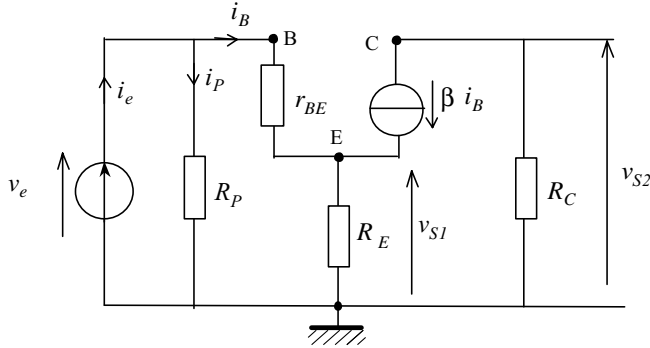


Figure 6.40 Schéma équivalent du montage à transistor bipolaire.

1. Calculer l'impédance d'entrée du quadripôle (vue de la source v_e), la sortie étant ouverte.
2. Calculer les gains en tension $A_1 = \frac{v_{S1}}{v_e}$ et $A_2 = \frac{v_{S2}}{v_e}$ du quadripôle, la sortie étant ouverte.
3. Calculer l'impédance de sortie du quadripôle lorsque la sortie est v_{S1} et lorsqu'elle est v_{S2} .

Solution

1. L'impédance d'entrée est donnée par l'expression suivante :

$$Z_e = \frac{v_e}{i_e} \quad \text{ou} \quad Y_e = \frac{i_e}{v_e} = \frac{i_B}{v_e} + \frac{i_P}{v_e}$$

En alternatif, la tension v_e peut s'écrire :

$$v_e = R_P \cdot i_P \quad \text{et} \quad v_e = r_{BE} \cdot i_B + R_E (i_B + \beta i_B) = (r_{BE} + (\beta + 1) R_E) i_B$$

Nous déduisons l'expression de l'admittance d'entrée :

$$Y_e = \frac{1}{R_P} + \frac{1}{r_{BE} + (\beta + 1) R_E} \quad \text{ou} \quad Z_e = R_P // (r_{BE} + (\beta + 1) R_E)$$

2. Le calcul du gain A_1 est déterminé en utilisant le schéma équivalent de la figure 6.40.

$$A_1 = \frac{v_{S1}}{v_e} = \frac{R_E (\beta + 1) i_B}{r_{BE} \cdot i_B + R_E (\beta + 1) i_B} = \frac{(\beta + 1) R_E}{r_{BE} + (\beta + 1) R_E}$$

Lorsque la résistance r_{BE} est très faible devant $(\beta + 1) R_E$, le gain en tension A_1 se simplifie :

$$A_1 = \frac{v_{S1}}{v_e} = \frac{(\beta + 1) R_E}{r_{BE} + (\beta + 1) R_E} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1$$

De la même façon, nous utilisons le schéma équivalent de la figure 6.40 pour déterminer A_2 .

$$A_2 = \frac{v_{S2}}{v_e} = \frac{-R_C \cdot \beta i_B}{r_{BE} \cdot i_B + R_E \times (\beta + 1) i_B} = \frac{-\beta R_C}{r_{BE} + (\beta + 1) R_E}$$

Lorsque la résistance r_{BE} est très faible devant $(\beta + 1)R_E$, et en négligeant 1 devant β , le gain en tension A_2 se simplifie :

$$A_2 = \frac{v_{S2}}{v_e} \approx \frac{-\beta R_C}{r_{BE} + \beta R_E} \approx \frac{-\beta R_C}{\beta R_E} = -\frac{R_C}{R_E}$$

3. Pour calculer l'impédance de sortie, nous transformons le schéma équivalent du montage.

► Lorsque la sortie est v_{S2} , nous obtenons le schéma de la figure 6.41. Nous simplifions davantage le schéma pour aboutir à celui de la figure 6.42.

Le générateur de courant βi_B est supposé idéal, sa résistance interne est de ce fait infinie, l'impédance de sortie devient :

$$Z_S = \frac{v_{S2}}{i_{S2}} = R_C$$

► Lorsque la sortie est v_{S1} , le schéma équivalent est celui de la figure 6.43. Nous pouvons simplifier le circuit pour obtenir la figure 6.44 :

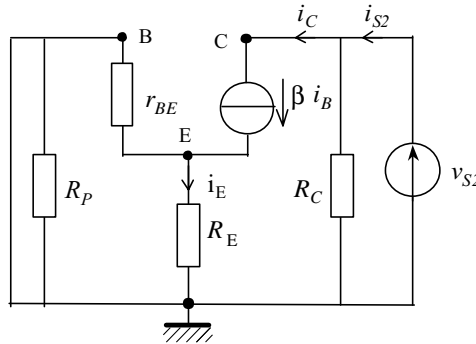


Figure 6.41 Transformation du schéma équivalent du montage.

La tension entre la base et l'émetteur étant : $v_{BE} = r_{BE} i_B$, le générateur de courant βi_B a une résistance infinie, la tension à ses bornes est la même tension que celle qui se trouve aux bornes de r_{BE} . Or, le courant débité par ce générateur est βi_B , le circuit se comporte comme si cette branche possédait une résistance r' .

$$v_{EB} = -r_{BE} \cdot i_B = -r' \cdot \beta \cdot i_B$$

la résistance r' est : $r' = \frac{r_{BE}}{\beta}$.

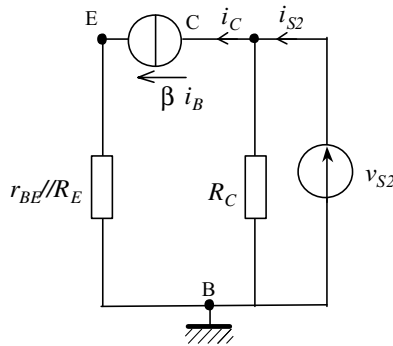


Figure 6.42 Schéma équivalent simplifié du montage.

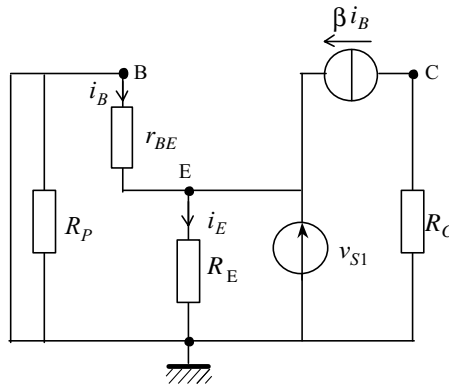
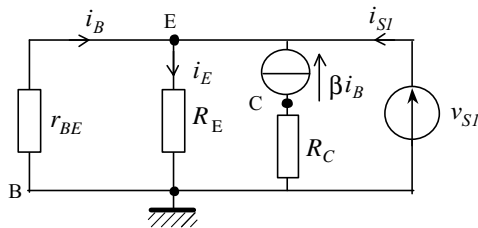
Figure 6.43 Schéma équivalent lorsque la sortie est v_{S1} .

Figure 6.44 Transformation du schéma simplifié du montage.

Nous pouvons donc remplacer cette branche par une résistance : $\frac{r_{BE}}{\beta}$. L'impédance vue du côté de la sortie est dans ce cas :

$$Z_S = r_{BE} // \left(\frac{r_{BE}}{\beta} \right) // R_E$$

Souvent la valeur de R_E est très grande par rapport à $\frac{r_{BE}}{\beta}$. Dans ce cas, l'impédance de sortie est pratiquement égale à :

$$Z_S \approx \left(\frac{r_{BE}}{\beta} \right) // R_E \approx \frac{r_{BE}}{\beta}$$

Exercice 6.2 Étude d'un montage base-commune

Soit le montage de la figure 6.45, représentant un transistor bipolaire qui fonctionne en montage base commune.

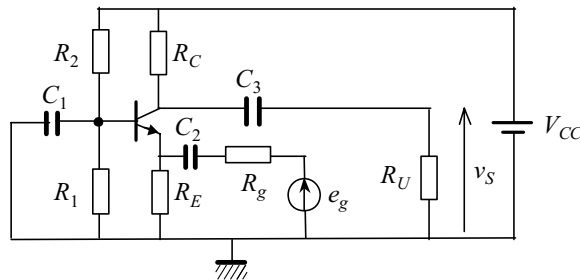


Figure 6.45 Montage base commune d'un transistor bipolaire.

Le signal d'entrée e_g attaque l'émetteur du transistor, la sortie du montage se trouve au niveau du collecteur. Nous supposons que tous les condensateurs se comportent comme des courts-circuits à la fréquence de travail.

Nous donnons :

$V_{CC} = 15 \text{ V}$, $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$, $\beta = 100$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_E = 1 \text{ k}\Omega$, $R_C = 2 \text{ k}\Omega$, $R_U = 10 \text{ k}\Omega$, $R_g = 100 \Omega$.

1. Calculer le point de fonctionnement de coordonnées : (I_{C0}, V_{CE0}) .
2. Donner le schéma équivalent en petits signaux
3. Calculer le gain en tension, la résistance d'entrée en sortie ouverte et la résistance de sortie.

Solution

1. Pour déterminer le point de fonctionnement, nous calculons en continu le générateur de Thévenin au niveau de la base du transistor, nous négligeons le courant I_B par rapport au courant I_C :

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_{CC} &= \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{I_{C0}}{\beta} + V_{BE0} + R_E \times I_{C0} \\ \frac{10}{50} \times 15 &= \frac{400}{50} \times 10^3 \times \frac{I_{C0}}{100} + 0,7 + 10^3 \times I_{C0} \end{aligned}$$

soit :

$$I_{C0} = 2,13 \text{ mA}$$

Nous déduisons la tension V_{CE0} :

$$V_{CC} = (R_C + R_E) I_{C0} + V_{CE0}$$

$$V_{CE0} = 15 - (3 \times 10^3 \times 2,13 \times 10^{-3}) = 5,61 \text{ V}$$

2. Le schéma équivalent s'obtient en faisant les remarques suivantes :

- les condensateurs sont remplacés par des courts-circuits ;
- le schéma équivalent du transistor ne comporte pas les condensateurs inter-électrodes.

La résistance de la jonction base-émetteur est notée r_{BE} et r_{CE} est la résistance vue entre le collecteur et l'émetteur. La valeur de cette dernière résistance est très élevée.

3. Calcul des paramètres du quadripôle équivalent à l'amplificateur :

► Gain en tension

Nous transformons le schéma équivalent de la figure 6.46, en remplaçant la source de courant par une source de tension. Le schéma équivalent devient celui de la figure 6.47.

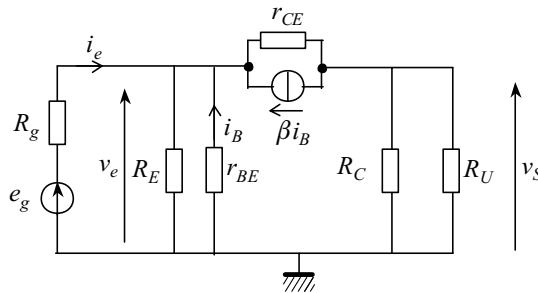


Figure 6.46 Schéma équivalent du montage base commune.

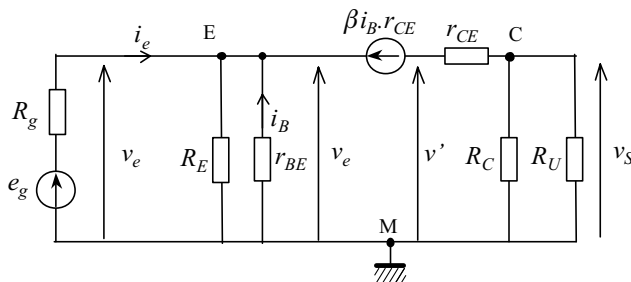


Figure 6.47 Schéma équivalent modifié.

Nous écrivons les équations suivantes :

$$v_e = -i_B \cdot r_{BE} \quad \text{et} \quad v_S = \frac{(R_U // R_C)}{(R_U // R_C) + r_{CE}} v'$$

$$v_e = (\beta i_B \cdot r_{CE}) + v'$$

soit :

$$v_S = \frac{(R_U // R_C)}{(R_U // R_C) + r_{CE}} (v_e - (\beta i_B \cdot r_{CE})) \quad v_S = \frac{(R_U // R_C)}{(R_U // R_C) + r_{CE}} \left(v_e + \left(\frac{\beta \times r_{CE}}{r_{BE}} \right) \cdot v_e \right)$$

Le gain en tension devient dans ce cas :

$$A_V = \frac{v_S}{v_e} = \frac{(R_U // R_C)}{(R_U // R_C) + r_{CE}} \left(1 + \left(\frac{\beta \cdot r_{CE}}{r_{BE}} \right) \right)$$

Les ordres de grandeurs donnent une valeur de r_{CE} très élevée (nous supposons sa valeur infinie). L'expression précédente du gain se simplifie pour donner :

$$A_V = \frac{v_S}{v_e} \approx \frac{R_C // R_U}{r_{CE}} \left(\frac{\beta \cdot r_{CE}}{r_{BE}} \right) \approx \frac{R_C}{r_{CE}} \left(\frac{\beta \times r_{CE}}{r_{BE}} \right) \approx \frac{\beta}{r_{BE}} \cdot R_C$$

sachant que la valeur approchée de la résistance de la jonction r_{BE} est :

$$r_{BE} \approx \frac{26 \text{ mV}}{I_{B0}} = \frac{26 \text{ mV}}{I_{C0}} \times \beta$$

ce qui donne :

$$A_V \approx \frac{1}{26 \times 10^{-3}} I_{C0} \cdot R_C \approx 38 \times I_{C0} \cdot R_C$$

L'expression du gain est identique à celle trouvée pour un émetteur commun, mais la tension de sortie et la tension d'entrée sont en phase.

► Résistance d'entrée

Nous commençons par transformer le générateur de courant βi_B et la résistance r_{CE} en un générateur équivalent de tension. Lorsque nous appliquons une tension d'entrée entre l'émetteur et la masse, en sortie ouverte, nous obtenons le schéma équivalent donné à la figure 6.48.

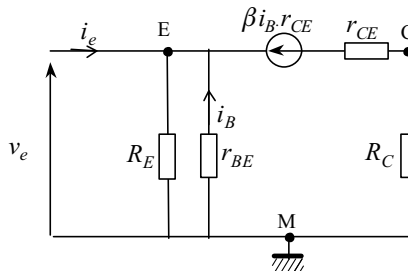


Figure 6.48 Transformation du générateur de courant en générateur de tension.

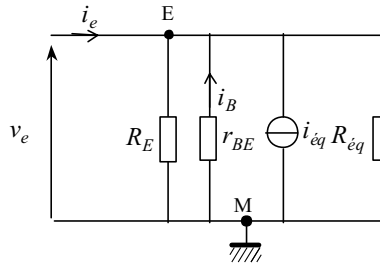


Figure 6.49 Schéma équivalent simplifié du montage après transformation.

Nous transformons de nouveau le générateur de Thévenin formé par la source idéale de tension $\beta i_B \cdot r_{CE}$ et sa résistance interne formée par la mise en série de r_{CE} et R_C en un nouveau générateur de courant comme indiqué à la figure 6.49.

$$i_{éq} = \frac{\beta i_B \cdot r_{CE}}{r_{CE} + R_C} \quad \text{et} \quad R_{éq} = r_{CE} + R_C$$

La tension qui apparaît aux bornes du générateur de courant est : $v_{ME} = r_{BE} \cdot i_B$ ce qui revient à remplacer ce générateur par une résistance :

$$R = \frac{r_{BE} \times (r_{CE} + R_C)}{\beta r_{CE}}$$

La résistance d'entrée résulte de la mise en parallèle de quatre résistances : R_E , r_{BE} , $R_{éq}$ et R :

$$R_e = R_E // r_{BE} // (r_{CE} + R_C) // \left(\frac{r_{BE} \times (r_{CE} + R_C)}{\beta r_{CE}} \right)$$

L'ordre de grandeur de r_{CE} est très élevé (nous la supposons infinie). Si nous considérons la valeur de $\beta \gg 1$ l'expression de la résistance d'entrée se simplifie :

$$R_e \approx R_E // r_{BE} // \left(\frac{r_{BE}}{\beta} \right) \approx \frac{r_{BE}}{\beta}$$

L'ordre de grandeur de la résistance d'entrée est de quelques dizaines d'ohms. Ce montage ne peut être utilisé que pour avoir une adaptation d'impédance et sert pour la haute fréquence. Dans ce cas, le gain total en tenant compte de la résistance R_g devient :

$$A_{V(total)} \approx 38 \times I_{C0} \times (R_C // R_U) \times \frac{R_e}{R_e + R_g}$$

► Résistance de sortie

Nous commençons par transformer le schéma équivalent en court-circuitant la source e_g et en déconnectant la charge R_U . Le schéma est donné à la figure 6.50.

La tension v peut s'écrire de différentes façons, ce qui nous permet de déterminer les différents courants qui circulent dans R_E et dans R_g .

$$v = r_{BE} \cdot i_B = R_E \cdot i_E = R_g \cdot i_g$$

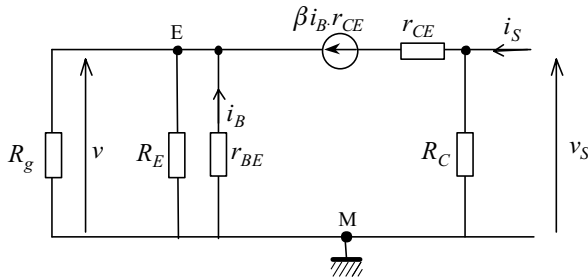


Figure 6.50 Méthode de calcul de la résistance de sortie en court-circuitant l'entrée.

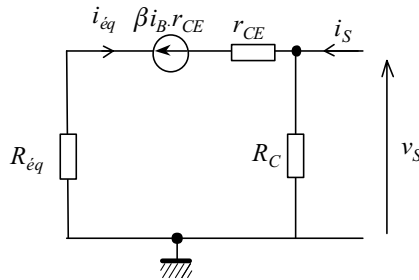


Figure 6.51 Schéma équivalent simplifié du montage après transformation.

ce qui donne :

$$i_E = \frac{r_{BE}}{R_E} i_B \quad \text{et} \quad i_g = \frac{r_{BE}}{R_g} i_B$$

Le schéma équivalent se simplifie davantage pour donner le schéma de la figure 6.51.

$$R_{eq} = r_{BE} // R_E // R_g \quad \text{et} \quad i_{eq} = r_{BE} \cdot i_B \left(\frac{1}{r_{BE}} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_g} \right)$$

Nous pouvons maintenant remplacer le générateur de tension $\beta i_B \cdot r_{CE}$. Ce générateur qui est parcouru par le courant i_q , peut être remplacé par une résistance R :

$$R = \frac{\beta \cdot r_{CE}}{r_{BE}} (r_{BE} // R_E // R_g) = \beta \cdot r_{CE} \left(\frac{r_{BE} // R_E // R_g}{r_{BE}} \right)$$

r_{BE} , R_E et R_g sont des résistances de faibles valeurs comparées à la valeur de βr_{CE} . La résistance R est donc très élevée, d'ordre de grandeur βr_{CE} . La résistance vue en sortie est :

$$R_S = \beta \cdot r_{CE} // R_C \approx R_C$$

Exercice 6.3 *Filtre passe-bas d'ordre 3 à amplificateurs opérationnels*

Pour réaliser un filtre passe-bas d'ordre 3, nous associons en cascade la cellule d'ordre un donnée à la figure 6.52 et la cellule d'ordre 2 donnée à la figure 6.53. Nous supposons que les amplificateurs opérationnels sont idéaux.

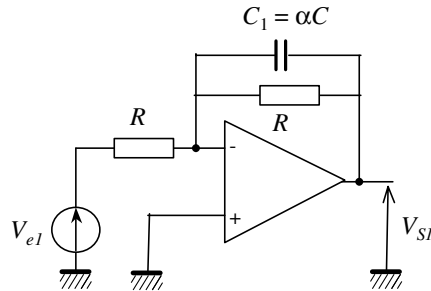


Figure 6.52 Montage-intégrateur.

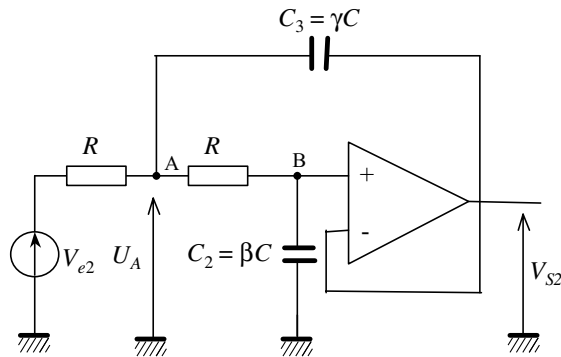


Figure 6.53 Structure de Sallen-Key.

La fonction de transfert normalisée s'écrit sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3} = \frac{1}{1 + s} \times \frac{1}{1 + s + s^2}$$

Nous choisissons des résistances identiques : $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 3,18 \text{ nF}$.

1. Calculer les fonctions de transfert H_1 et H_2 En déduire H .

$$H_1 = \frac{V_{S1}}{V_{e1}} ; \quad H_2 = \frac{V_{S2}}{V_{e2}} ; \quad H = H_1 \times H_2$$

2. Calculer les valeurs de α , β et γ

3. Tracer les courbes du gain en fonction de la fréquence.

Solution

1. Nous reconnaissons, à la figure 6.52, le schéma d'un intégrateur. Le calcul de sa fonction de transfert est :

$$H_1(p) = \frac{V_{S1}}{V_{e1}} = -\frac{Z_1}{R}$$

avec

$$Z_1 = \frac{R}{1 + RC_1 p}$$

soit :

$$H_1(p) = -\frac{1}{1 + R_1 C p}$$

Pour le deuxième montage, nous remarquons que $V_B = V_{S2}$ (l'amplificateur opérationnel est idéal). Nous appliquons au point A le théorème de Millman.

$$V_A = \frac{\frac{V_{e2}}{R} + \frac{V_{S2}}{R} + V_{S2} C_3 p}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + C_3 p} = \frac{V_{e2} + V_{S2} (1 + RC_3 p)}{2 + RC_3 p}$$

Au point B, nous avons un diviseur de tensions. Si nous notons Z_{C2} l'impédance du condensateur C_2 , la tension de sortie devient :

$$V_{S2} = V_B = V_A \frac{Z_{C2}}{Z_{C2} + R} = \frac{V_A}{1 + RC_2 p}$$

soit :

$$H_2(p) = \frac{V_{S2}}{V_{e2}} = \frac{1}{(1 + RC_2 p) (2 + RC_3 p) - (1 + RC_3 p)} = \frac{1}{1 + 2RC_2 p + R^2 C_2 C_3 p^2}$$

La fonction de transfert du filtre total devient :

$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p) = -\frac{1}{1 + RC_1 p} \times \frac{1}{1 + 2RC_2 p + R^2 C_2 C_3 p^2}$$

2. Si nous notons $s = RCp$, la fonction de transfert devient :

$$H = H_1 \times H_2 = \frac{1}{1 + \alpha s} \times \frac{1}{1 + 2\beta s + \beta \gamma s^2} = \frac{1}{1 + (\alpha + 2\beta) s + \beta (2\alpha + \gamma) s^2 + \alpha \beta \gamma s^3}$$

L'identification donne :

$$\frac{1}{1 + \alpha s} = \frac{1}{1 + s}$$

$$\frac{1}{1 + 2\beta s + \beta \gamma s^2} = \frac{1}{1 + s + s^2}$$

nous en déduisons :

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0,5 \quad \text{et} \quad \gamma = 2$$

Nous pouvons déterminer les valeurs des condensateurs du montage final :

$$C_1 = \alpha C = 3.18 \text{ nF}, \quad C_2 = \beta C = 1.59 \text{ nF} \quad \text{et} \quad C_3 = \gamma C = 6.36 \text{ nF}.$$

3. Pour tracer les courbes du gain en fonction de la fréquence, nous remplaçons dans chaque fonction de transfert, les valeurs de R , αC , βC et γC .

La fréquence de coupure et la fréquence caractéristique sont identiques : $f_C = f_0 = 5 \text{ kHz}$.

La courbe du gain de H_1 est la courbe classique d'un intégrateur (filtre d'ordre 1).

La courbe du gain de H_2 est la courbe d'un filtre de second ordre. Son coefficient m étant égal à 0,5 donc inférieur à 0,7, nous obtenons une surtension.

La fonction de transfert finale est :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3} = \frac{1}{1+s} \times \frac{1}{1+s+s^2}$$

$$H(s) = - \frac{1}{1 + 2j\frac{\omega}{\omega_0} - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 5 \text{ kHz.}$$

Pour $f = f_0$, la fonction de transfert devient :

$$H(p) = - \frac{1}{1 + 2j - 2 - j} = \frac{1}{1-j} \quad \text{soit : } |H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cette fréquence correspond donc à la fréquence de coupure.

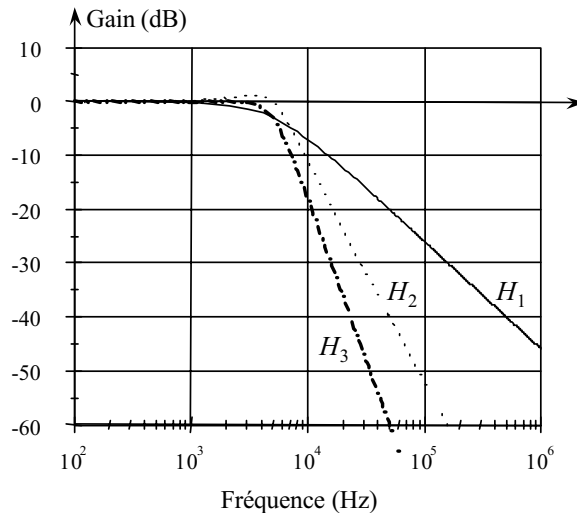


Figure 6.54 Courbes du gain en fonction de la fréquence.

Exercice 6.4 Étude comparée d'un filtre de Wienn simple et d'un filtre de Wienn amélioré

Soit le montage d'un filtre de Wienn donné à la figure 6.55 et le montage de la figure 6.56 représentant un autre filtre de Wienn, amélioré grâce à l'utilisation d'un amplificateur opérationnel.

1. Pour le montage de la figure 6.55, calculer la fonction de transfert du filtre. Tracer la courbe du gain en fonction de la fréquence dans le cas particulier :

$$R_1 = R_2 = R \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 = C.$$

Déterminer le coefficient de qualité Q_1 .

2. Refaire le même travail pour le montage de la figure 6.56. Conclure.

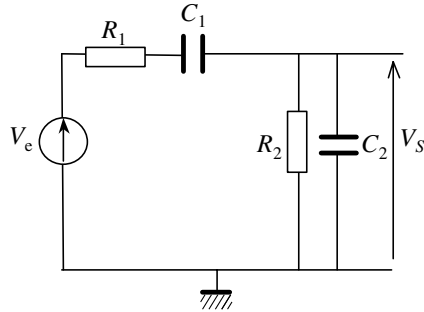


Figure 6.55 Filtre de Wienn.

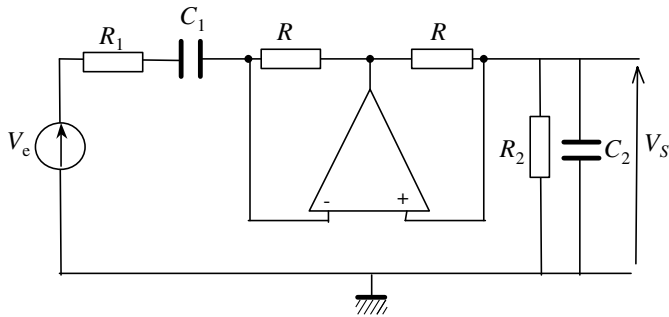


Figure 6.56 Filtre de Wienn amélioré.

Solution

1. Nous commençons par étudier le premier montage.

► Calcul de la fonction de transfert du premier filtre

Notons :

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}.$$

$$\frac{V_{S1}}{V_E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + Z_1 Y_2} = \frac{1}{1 + \left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \left(\frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2} \right)}$$

En développant le dénominateur, nous obtenons :

$$\frac{V_{S1}}{V_E} = \frac{jR_2C_1\omega}{jR_2C_1\omega + (1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}$$

$$\frac{V_{S1}}{V_E} = \frac{jR_2C_1\omega}{1 + j\omega(R_2C_1 + R_1C_1 + R_2C_2) - (R_1R_2C_1C_2)\omega^2}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande (filtre de Wienn). Sa fonction de transfert peut se mettre sous une forme standard :

$$H_1(j\omega) = \frac{V_{S1}}{V_E} = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_{02}} - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2}$$

avec :

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_2 C_1} ; \quad \omega_{02} = \frac{1}{R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2} ; \quad \omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Cas particulier :

$$R_1 = R_2 = R \quad \text{et} \quad C_1 = C_2 = C$$

soit :

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{V_{S1}}{V_E} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 3j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Par identification, nous trouvons $A = 1$ et $m = 1,5$.

La fonction de transfert devient :

$$H_1(j\omega) = \frac{V_{S1}}{V_E} = \frac{jx}{1 + 3jx - x^2} = \frac{1}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ qui représente la pulsation normalisée

► Tracé de la courbe du gain en fonction de la fréquence

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H_1(\omega)| = \left| \frac{V_{S1}}{V_{E1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Ce résultat montre que pour $x = 1$, le module est maximal et vaut $|H_1|_{Max} = 1/3$. Nous avons toujours un amortissement. Nous déterminons les courbes asymptotiques :

$$\begin{cases} x \ll 1 & H_1(jx) \approx jx \text{ (nous trouvons une pente de } +20 \text{ dB/décade)} \\ x \gg 1 & H_1(jx) \approx 1/jx \text{ (nous trouvons une pente de } -20 \text{ dB/décade)} \\ x = 1 & H_1(jx) = H_{1Max} \end{cases}$$

Le tracé de l'amplitude en fonction de la fréquence est donné à la figure 6.57.

► Calcul du coefficient de qualité Q_1

Pour déterminer le coefficient de qualité Q_1 , nous calculons les fréquences de coupures f_{C1} et f_{C2} pour lesquelles l'amplitude est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

$$|H_1| = \frac{|H_{1Max}|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

soit :

$$9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 18$$

Nous obtenons une équation de second degré : $x^2 - 3x - 1 = 0$ dont les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{+3 + \sqrt{9+4}}{2}; \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9+4}}{2}$$

ce qui donne les pulsations ω_{C1} et ω_{C2} .

$$\omega_{C1} = \frac{+3 + \sqrt{9+4}}{2} \omega_0; \quad \omega_{C2} = \frac{-3 + \sqrt{9+4}}{2} \omega_0$$

Le coefficient de qualité est :

$$Q_1 = \frac{\omega_0}{\omega_{C1} - \omega_{C2}} = \frac{1}{3}$$

2. Étude du deuxième montage.

► Calcul de la fonction de transfert

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal, nous avons des courants entrants nuls :

$$\begin{cases} V_A = V_B = V_{S2} = -Z_2 I_S \\ V_E - V_A = V_E - V_{S2} = Z_1 I_E \\ \frac{V_E - V_{S2}}{Z_1} = -\frac{V_{S2}}{Z_2} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{V_E}{Z_1} &= V_{S2} \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) \\ H_2(j\omega) &= \frac{V_{S2}}{V_E} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 (Z_2 - Z_1)} = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{1 - Z_1 Y_2} \\ H_2(j\omega) &= \frac{V_{S2}}{V_E} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1 + jR_1 C_1 \omega}{jC_1 \omega} \right) \left(\frac{1 + jR_2 C_2 \omega}{R_2} \right)} \\ H_2(j\omega) &= -\frac{jR_2 C_1 \omega}{1 + j\omega (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_2 C_1) + j^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2} \end{aligned}$$

► Tracé de la courbe du gain en fonction de la fréquence

Il s'agit de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande dont le tracé est donné à la figure 6.57 dans le cas particulier $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C$.

$$H_2 = \frac{V_{S2}}{V_{E2}} = -\frac{jx}{1 + jx - x^2} = -\frac{1}{1 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

dont le module est :

$$|H_2| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Ce résultat montre que pour $x = 1$, le module est maximal et vaut $|H_1|_{Max} = 1$. Nous avons toujours un amortissement. Nous déterminons les mêmes courbes asymptotiques :

$$\begin{cases} x \ll 1 & H_1(jx) \approx jx \text{ (nous trouvons une pente de } +20 \text{ dB/décade)} \\ x \gg 1 & H_1(jx) \approx 1/jx \text{ (nous trouvons une pente de } -20 \text{ dB/décade)} \\ x = 1 & H_1(jx) = H_{1MAX} \end{cases}$$

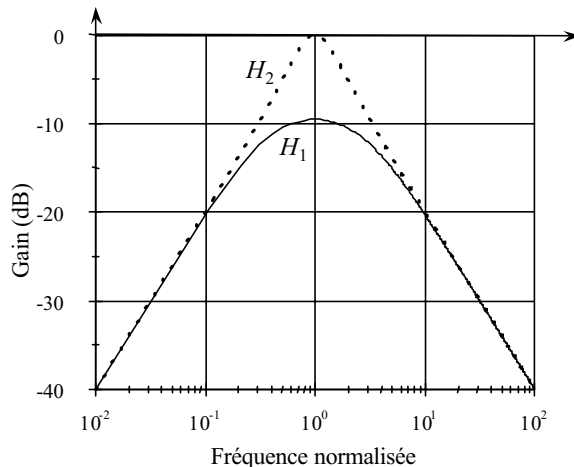


Figure 6.57 Courbes du gain en fonction de la fréquence.

► Calcul du coefficient de qualité Q_2

Nous pouvons calculer le coefficient de qualité comme précédemment, mais nous pouvons aussi identifier la fonction obtenue par l'expression standard d'un filtre

pas-se-bande.

$$H_2 = \frac{V_{S2}}{V_{E2}} = -\frac{1}{1+j\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Nous trouvons donc le coefficient de qualité : $Q_2 = 1$.

Ce coefficient de qualité est plus élevé que le coefficient déterminé précédemment ($Q_2 = 3Q_1$). L'introduction de l'amplificateur opérationnel permet d'améliorer la sélectivité du filtre.



Remarque : Le choix d'une résistance $R_1 < R_2$ et $C_1 > C_2$ permet d'améliorer d'avantage la sélectivité en augmentant davantage le coefficient de qualité.

Exercice 6.5 Source de courant commandée en tension à amplificateur opérationnel

Soit le montage de la figure 6.58. Nous supposons que l'amplificateur opérationnel est idéal.

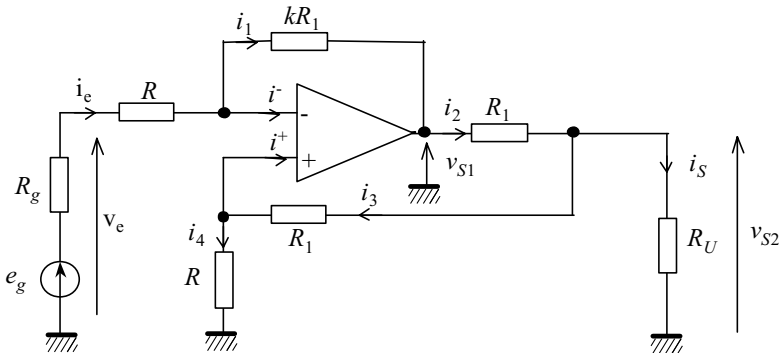


Figure 6.58 Exemple de réalisation d'une source de courant commandée en tension.

Montrer que le courant de sortie débité dans la charge R_U est indépendant de celle-ci, ce courant s'écrit sous la forme : $i_s = Yv_e$

Solution

Le courant de sortie est donné par :

$$i_s = i_2 - i_3 = \frac{v_{S1} - v_{S2}}{R_1} - \frac{v_{S2} - v^+}{R_1}$$

L'amplificateur opérationnel étant idéal, les courants entrants sont nuls : $i^+ = i^- = 0$. Les courants i_3 et i_4 sont identiques : $i_3 = i_4$. Nous pouvons donc appliquer le diviseur de tension :

$$v^+ = v^- = \frac{R}{R + R_1} v_{S2}$$

Le courant d'entrée i_e et le courant i_1 sont identiques : $i_e = i_1$. Or :

$$i_e = \frac{v_e - v^-}{R} = \frac{v^- - v_{S1}}{k.R_1} = \frac{v^+ - v_{S1}}{k.R_1}$$

Nous pouvons donc déduire la tension de sortie :

$$v_{S1} = kR_1 \left(\frac{v^-}{kR} + \frac{v^-}{R} - \frac{v_e}{R} \right) = \left(1 + k\frac{R_1}{R} \right) v^- - k\frac{R_1}{R} v_e$$

En remplaçant v^- par son expression en fonction de v_{S1} , nous obtenons :

$$v_{S1} = \left(1 + k\frac{R_1}{R} \right) \left(\frac{R}{R + R_1} \right) v_{S2} - k\frac{R_1}{R} v_e$$

soit :

$$v_{S1} = \left(\frac{R + kR_1}{R + R_1} \right) v_{S2} - k\frac{R_1}{R} v_e$$

En utilisant les équations précédentes, le courant de sortie devient :

$$i_s = \left(\frac{R + kR_1 - (R + R_1) - R_1}{R_1 (R + R_1)} \right) v_{S2} - \frac{k}{R} v_e$$

Pour obtenir une source de courant commandée en tension, la première quantité entre parenthèses doit être nulle. Nous obtenons :

$$i_s = -\frac{k}{R} v_e \quad \text{et} \quad \left(\frac{R + kR_1 - (R + R_1) - R_1}{R_1 (R + R_1)} \right) v_{S2} = 0$$

$$k = 2 \quad \text{et} \quad i_s = -\frac{2}{R} v_e$$

Le convertisseur tension-courant possède un coefficient de transfert égal à : $Y = -2/R$. Ce coefficient est indépendant de la résistance de charge R_U .

Exercice 6.6 *Circuit raisonnant permettant une surintensité*

Soit le montage de la figure 6.59. Nous supposons que l'amplificateur opérationnel est idéal.

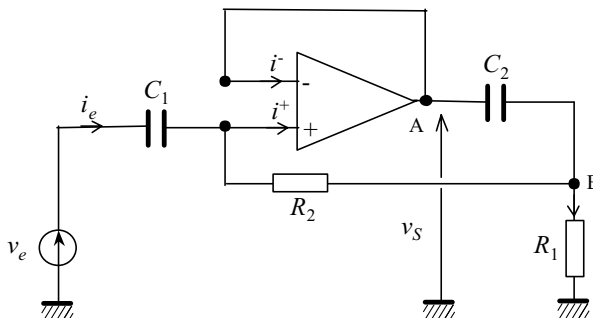


Figure 6.59 Montage à amplificateur opérationnel permettant une surintensité.

1. Nous supposons une tension d'entrée sinusoïdale d'amplitude V et de fréquence variable. Calculer la valeur f_0 pour laquelle le courant à l'entrée i_e du montage est maximal. Tracer la courbe du courant en fonction de la fréquence autour de f_0 .

Application numérique :

$$V = 10 \text{ V}, \quad R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega, \quad C_1 = 0,1 \text{ nF} \quad \text{et} \quad C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}.$$

2. Calculer le coefficient de qualité. Conclure.

Solution

1. Nous supposons que l'amplificateur opérationnel est idéal.

$$i^- = i^+ = 0 \quad \text{et} \quad v^- = v^+ = v_A = v_S$$

Le courant i_e passe donc dans le condensateur C_1 et dans la résistance R_2 .

$$i_e = \frac{v_e - v_B}{R_2 + Z_{C1}} \quad \text{ou bien} \quad i_e = \frac{v_e - v_S}{Z_{C1}}$$

Le potentiel du point B peut être déterminé en utilisant le théorème de Millmann :

$$v_B = \frac{v_A \cdot Y_{C2} + v^+ \cdot G_2 + 0 \cdot G_1}{Y_{C2} + G_1 + G_2} = \frac{v_S \cdot Y_{C2} + v_S \cdot G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2}$$

$$v_B = v_S \cdot \frac{Y_{C2} + G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2}$$

Le courant i_e devient dans ce cas :

$$i_e = \frac{v_e}{R_2 + Z_{C1}} - \frac{v_S}{R_2 + Z_{C1}} \times \frac{Y_{C2} + G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2}$$

or, $v_S = v_e - Z_{C1} \cdot i_e$, ce qui donne :

$$i_e = \frac{v_e}{R_2 + Z_{C1}} - \frac{v_e - Z_{C1} \cdot i_e}{R_2 + Z_{C1}} \times \frac{Y_{C2} + G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2}$$

$$i_e - \frac{Z_{C1} \cdot i_e}{R_2 + Z_{C1}} \times \frac{Y_{C2} + G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2} = \frac{v_e}{R_2 + Z_{C1}} - \frac{v_e}{R_2 + Z_{C1}} \times \frac{Y_{C2} + G_2}{Y_{C2} + G_1 + G_2}$$

$$i_e = \frac{v_e}{R_1 [(R_2 + Z_{C1})(Y_{C2} + G_1 + G_2) - Z_{C1}(Y_{C2} + G_2)]}$$

Finalement, nous pouvons déduire l'expression du courant d'entrée i_e en fonction de v_e :

$$i_e = \frac{v_e}{R_1 + R_2 + j \left(R_1 R_2 C_2 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)}$$

Le courant d'entrée est maximal lorsque le module de l'impédance d'entrée Z_e est minimal :

$$|Z_e| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(R_1 R_2 C_2 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}\right)^2}$$

pour :

$$R_1 R_2 C_2 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} = 0, |Z_e| = |Z_e|_{\min}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{ou} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

L'impédance d'entrée minimale étant purement résistive de valeur $R_1 + R_2$, le courant et la tension d'entrée sont donc en phase.

Pour tracer la courbe du courant autour de f_0 , nous utilisons pour l'axe des abscisses et pour l'axe des ordonnées une échelle linéaire. En plus, nous normalisons les fréquences en les divisant par f_0 . L'allure de la variation du courant en fonction de la fréquence est donnée à la figure 6.60.

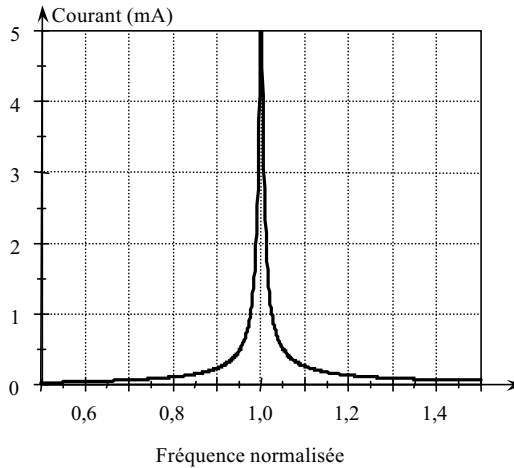


Figure 6.60 Variation du courant en fonction de la fréquence.

2. Le coefficient de qualité Q est donné par le rapport : $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ soit : $Q = \frac{f_0}{f_{C2} - f_{C1}}$,

où f_{C2} et f_{C1} sont les fréquences de coupure qui correspondent à une division de la sortie par $\sqrt{2}$. Ceci revient à avoir une valeur de l'impédance $Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{2}Z_{\min}$.

Nous pouvons résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{R^2 C_1 C_2 \omega^2 - 1}{C_1 \omega}\right)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(R_1 + R_2)^2}$$

Le calcul est trop long, il est plus facile d'identifier la fonction de transfert obtenue avec la fonction de transfert standard d'ordre 2 :

$$\frac{i_e}{v_e} = \frac{1}{(R_1 + R_2) + j \left(R_1 R_2 C_2 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)} = \frac{j C_1 \omega}{1 + j (R_1 + R_2) C_1 \omega + j^2 R_1 R_2 C_2 \omega^2}$$

$$\frac{i_e}{v_e} = \frac{1}{(R_1 + R_2)} \frac{j (R_1 + R_2) C_1 \omega}{1 + j (R_1 + R_2) C_1 \omega + j^2 R_1 R_2 C_2 \omega^2}$$

$$\frac{i_e}{v_e} = \frac{1}{(R_1 + R_2)} \times \frac{2jmx}{1 + 2jmx + j^2 x^2}$$

Nous en déduisons l'expression de m :

$$2m \frac{\omega}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = (R_1 + R_2) C_1 \omega$$

soit :

$$2m = \frac{(R_1 + R_2) C_1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Nous en déduisons donc l'expression du coefficient de qualité Q :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(R_1 + R_2) C_1} = \frac{1}{R_1 + R_2} \times \sqrt{R_1 R_2 \frac{C_2}{C_1}}$$

Application numérique :

$$Q = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{10^{-6}}{10^{-10}}} = 50.$$

Ce coefficient de qualité est relativement élevé. Il est souvent impossible d'obtenir une telle valeur avec des circuits passifs RLC .

Exercice 6.7 *Calcule des paramètres d'un quadripôle avec contre réaction*

On souhaite calculer les paramètres du quadripôle équivalent total : amplification à vide, impédance d'entrée et impédance de sortie.

On suppose pour l'amplificateur opérationnel un gain à vide $A_{V0} = 10^5$, une impédance d'entrée $Z_{e0} = 200 \text{ k}\Omega$ et une impédance de sortie $Z_{s0} = 50 \text{ }\Omega$. On suppose aussi que le courant qui circule dans R_2 et dans R_1 est faible (à négliger dans le calcul).

Application numérique : $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$ et $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$.

1. Donner le Schéma du montage sous forme d'un système bouclé formé d'un quadripôle H_F et d'un quadripôle H_R . En déduire le type de contre réaction réalisée.

2. Calculer pour le montage complet (avec contre réaction) le gain à vide A_V , l'impédance d'entrée Z_e et l'impédance de sortie Z_S .

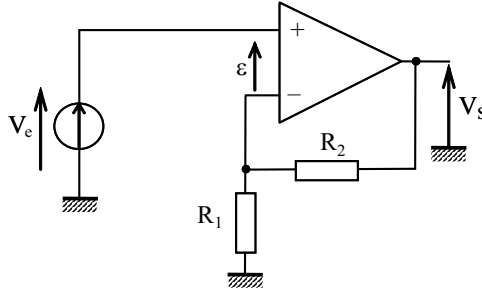


Figure 6.61 Amplificateur avec contre réaction.

Solution

1. Schéma équivalent

Le schéma équivalent de l'amplificateur opérationnel se met sous la forme d'un quadripôle noté H_F , le quadripôle de la chaîne de retour est formé d'un pont diviseur R_1 , R_2 . Le schéma équivalent complet devient celui donné à la figure 6.62.

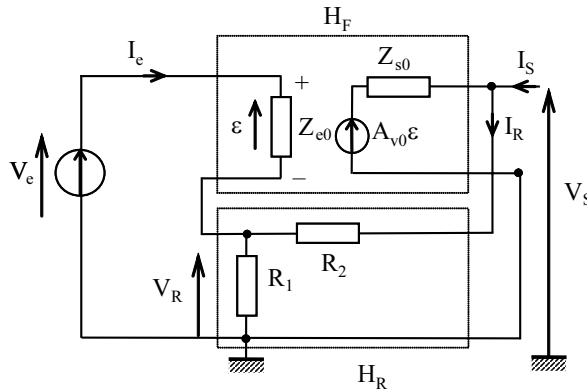


Figure 6.62 Schéma de l'amplificateur sous forme de deux quadripôles.

On remarque donc qu'il s'agit d'une tension prélevée en sortie et réinjectée à l'entrée. On parle d'une contre réaction du type : tension-série ou du type tension-tension.

2. Calcul des paramètres du schéma équivalent

Calcul de l'impédance d'entrée

L'impédance d'entrée du montage complet est déterminée à vide, lorsque le courant de sortie est nul ($I_S = 0$).

$$V_S = A_{V0}\epsilon \quad \text{et} \quad V_R = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_S$$

Soit :

$$V_R = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_S = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times A_{V0} \varepsilon$$

Or, la différence de potentiel entre l'entrée « + » et l'entrée « - » est : $\varepsilon = V_e - V_R$, ce qui donne :

$$V_e = \varepsilon + V_R = \varepsilon + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times A_{V0} \varepsilon = \left(1 + A_{V0} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \times \varepsilon$$

On note le taux de contre réaction : $K = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ et on trouve : $V_e = (1 + A_{V0}K) \times \varepsilon$.

Sachant que l'impédance d'entrée de l'amplificateur opérationnel seul est : $Z_{e0} = \frac{\varepsilon}{I_e}$.

L'impédance d'entrée du montage complet devient :

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e} = (1 + A_{V0}K) \times \frac{\varepsilon}{I_e} = (1 + A_{V0}K) \times Z_{e0}$$

L'impédance d'entrée se trouve augmentée par la contre réaction.

Calcul de l'impédance de sortie et de l'amplification

L'impédance de sortie du montage complet et l'amplification à vide sont déterminées de la façon suivante :

$$V_S = A_{V0} \varepsilon + Z_{S0} (I_S - I_R) \approx A_{V0} \varepsilon + Z_{S0} I_S \quad \text{et} \quad \varepsilon = V_e - V_R$$

$$V_S \approx A_{V0} (V_e - V_R) + Z_{S0} I_S = A_{V0} (V_e - K V_S) + Z_{S0} I_S$$

On trouve : $V_S = \frac{A_{V0}}{1 + K A_{V0}} \times V_e + \frac{Z_{S0}}{1 + K A_{V0}} I_S$

Cette expression représente en fait la sortie de la source de tension de l'amplificateur mise sous forme d'un générateur de Thévenin équivalent. Lorsqu'on charge l'amplificateur par une résistance de charge R_C , on obtient le schéma de la figure 6.63.

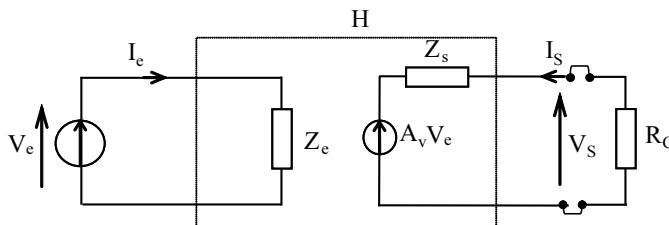


Figure 6.63 Schéma de l'amplificateur complet sous forme d'un quadripôle.

On trouve l'équation de sortie : $V_S = A_V \times V_e + Z_S I_S$

Par identification, on trouve : $A_V = \frac{A_{V0}}{1 + K A_{V0}} \quad \text{et} \quad Z_S = \frac{Z_{S0}}{1 + K A_{V0}}$

Applications numériques :

$$K = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$Z_e = (1 + A_{V0}K) \times Z_{e0} = (1 + 10^5 \times 0,1) \times 200 \times 10^3 \approx 2 \times 10^9 \Omega$$

$$A_V = \frac{A_{V0}}{1 + KA_{V0}} = \frac{10^5}{1 + 0,1 \times 10^5} = \frac{10^5}{1 + 10^4} \approx 10$$

$$Z_S = \frac{Z_{S0}}{1 + KA_{V0}} = \frac{50}{1 + 0,1 \times 10^5} = \frac{50}{1 + 10^4} \approx 5 \times 10^{-3} \Omega$$

Exercice 6.8 Application de l'amplificateur opérationnel : multivibrateur astable

On donne le montage de la figure (6.64 a) appelé comparateur à Hystérésis ou trigger de Schmitt. L'amplificateur opérationnel fonctionne en commutation entre $V_{\text{sat}}^+ = V_{CC} = 15 \text{ V}$ et $V_{\text{sat}}^- = -V_{CC} = -15 \text{ V}$ qui représentent les tensions de saturation de l'amplificateur opérationnel.

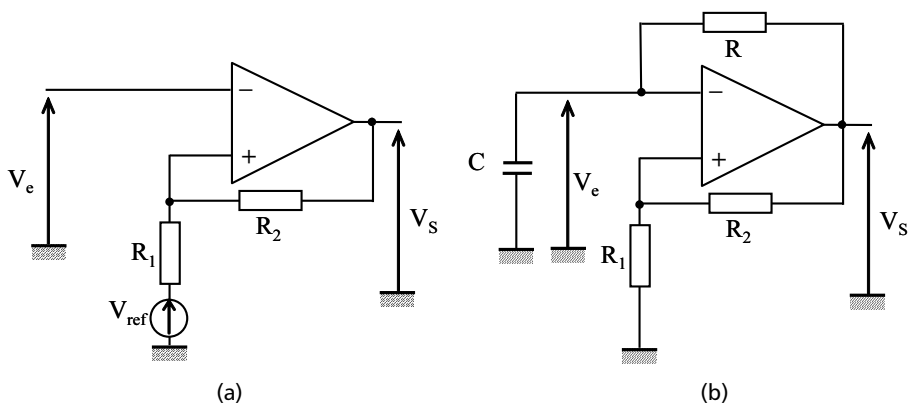


Figure 6.64 Montage dit « trigger de Schmitt » en (a) et multivibrateur astable en (b).

1. Déterminer l'expression du potentiel de l'entrée « + » de l'amplificateur opérationnel en fonction de la situation de la sortie V_S .
2. Le montage précédent est modifié (figure 6.64 b). Ce montage est appelé multivibrateur astable. Déterminer l'expression du potentiel de l'entrée « - » en fonction de la situation de la sortie. En déduire l'évolution de la tension de sortie et en déduire la période T .

Solution

1. Expression du potentiel de l'entrée « + »

Si la tension de sortie est $V_S = V_{\text{sat}}^+$, c'est le cas si la tension d'entrée $V_e < V_1^+$, pour déterminer la tension V_1^+ , on applique le théorème de superposition et on obtient la formule suivante :

$$V_1^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}^+ + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{réf}}$$

– Supposons maintenant que la tension d'entrée augmente. Au moment où sa valeur dépasse la tension V_1^+ , le trigger bascule et la tension de sortie devient égale à V_{sat}^- . Dans ce cas, la tension qui existe sur l'entrée « + » évolue rapidement et devient égale à la valeur donnée par la formule suivante :

$$V_2^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}^- + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{réf}}$$

– Si la tension d'entrée évolue maintenant et sa valeur diminue jusqu'à atteindre la valeur de V_2^+ . Le trigger va de nouveau basculer et la sortie devient égale à la valeur de la tension de saturation positive V_{sat}^+ .

Nous remarquons sur la figure (6.65 a), qui donne la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée, que le passage « *bas vers haut* » est différent du passage « *haut vers bas* ». Ce phénomène est connu sous l'appellation de cycle d'hystérésis.

Le point A qui est le centre du cycle est donné par la formule suivante :

$$V_e = \frac{V^+ + V^-}{2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{réf}}$$

Pour une tension de référence nulle (figure 6.65 b), le point A devient le point d'intersection des deux axes et le trigger est centré et symétrique.

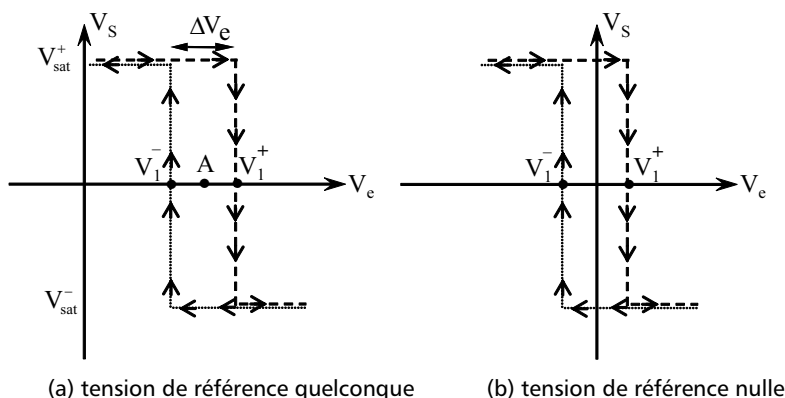


Figure 6.65 Cycle d'hystérésis pour une référence quelconque (a) et pour une référence nulle (b).

2. Étude du multivibrateur astable

Le trigger précédent est maintenant modifié de façon à effectuer une comparaison avec une tension d'entrée dépendant de la tension de sortie ce qui permet d'avoir des tensions de sortie sans avoir à injecter une tension entrée V_e .

On a : $V_{\text{sat}}^+ = +V_{CC}$ et $V_{\text{sat}}^- = -V_{CC}$. La tension de référence est nulle ce qui donne :

$$V_1^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{Sat}}^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad \text{et} \quad V_2^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{Sat}}^- = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC}$$

La tension d'entrée V_e est la différence de potentiel obtenue aux bornes d'un condensateur alimenté par une source de tension égale à $\pm V_{CC}$ à travers une résistance R .

Si l'on prend comme origine des temps le moment où V_S passe à $+V_{CC}$ par exemple, V_e suit alors la loi classique étudiée auparavant et concernant la charge d'un condensateur.

$$V_e(t) = V_{CC} \times \left[1 - e^{-t/\tau} \right], \quad \text{avec : } \tau = RC$$

Comme $V_e(t)$ est une tension croissante, elle va franchir le seuil de commutation V_1^+ à l'instant t_1 donné en utilisant l'équation :

$$V_e(t_1) = V_{CC} \times \left[1 - e^{-t_1/\tau} \right] = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC}$$

En conséquence la tension de sortie change de signe et le condensateur tend à se charger jusqu'à $-V_{CC}$ (se décharger). La tension $V_e(t)$ suit alors la loi d'évolution suivante :

$$V_e(t) = (-V_{CC} - V_1^+) \times \left[1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right] + V_1^+$$

Le seuil de commutation qui est le reflet de la tension de sortie est maintenant égal à V_2^+ . Comme V_e est décroissante, il sera franchi à l'instant t_2 tel que :

$$V_e(t_2) = (-V_{CC} - V_1^+) \times \left[1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} \right] + V_1^+ = -V_{CC} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{aligned} (+V_{CC} + V_1^+) \times e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} &= -V_{CC} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} + V_{CC} = V_{CC} \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] \\ &= V_{CC} \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \end{aligned}$$

$$V_{CC} \times \left[1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] \times e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = V_{CC} \times \left[\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right] \times e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = V_{CC} \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right]$$

$$[2R_1 + R_2] \times e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = R_2, \quad \text{soit : } t_2 - t_1 = \tau \times \text{Ln} \left[\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right]$$

La tension de sortie redevient positive et le processus de charge du condensateur vers la valeur $+V_{CC}$ recommence comme au début (Figure 6.66). Ce phénomène qui est

symétrique est donc périodique. La demi-période est égale à $(t_2 - t_1)$ et la période est :

$$T = 2 \times (t_2 - t_1) = 2\tau \times \text{Ln} \left[\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right] = 2RC \times \text{Ln} \left[\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right]$$

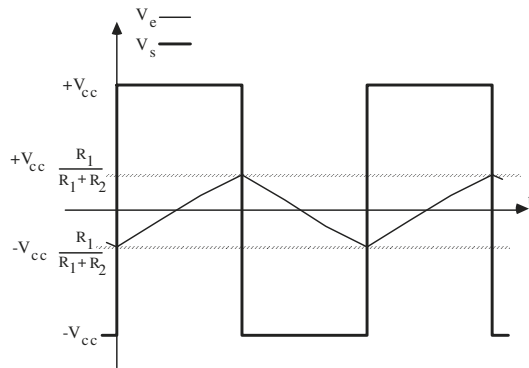


Figure 6.66 Allures des tensions V_e et V_s d'un multivibrateur astable.

Index

A

- admittance 108
- ampère 26
- amplificateur
 - inverseur 267
 - non inverseur 268
 - opérationnel 261
- amplification différentielle 264
- angle de perte 126
- argument 104
- association
 - en parallèle de deux quadripôles 160
 - en série de deux quadripôles 160
- asymptote 171
- avance de phase 14, 110, 111

B

- base 249
- branche 45

C

- canal N 252
- capacité 21, 218
- champ
 - électrique 2
 - magnétique 22
- charge électrique 2
- circuit
 - de second ordre 205

- intégrateur 205
 - RLC* série 206
- coefficient
 - d'amortissement 205
 - de qualité 123
- collecteur 249
- compensation interne 265
- condensateur 20, 110
- condition initiale
 - non nulle 221
 - nulle 220
- conductance 3
- conduction électrique 1, 2
- conductivité électrique 3
- constante de temps 202, 204
- contre réaction 275
- convention
 - générateur 6
 - récepteur 6
- couplage
 - étoile 128, 129
 - triangle 128, 130
- courant
 - de court-circuit 9
 - électrique 2
 - virtuel 65

D

décibel 167
densité de courant 3
dépassement 227
déphasage 13
diagramme
 asymptotique 257
 de Bode 167
 de Bode du gain 257
diélectrique 20
différence de potentiel 4
dipôle 45
 électrique 6
 RLC parallèle 113
 RLC série 112
drain 252

E

échelon
 unité 16
 unitaire 213
effet Joule 4, 5
électrocinétique 1
élément linéaire 46
émetteur 249
énergie 4
 électrostatique 20
 active 123
équations différentielles 199

F

facteur de qualité 207
fil neutre 129
filtre
 actif 272
 passe-bas 223, 224
fonction
 de second ordre 172
 de transfert 166, 222
 exponentielle 17, 214
 périodique 11
 porte 16
 rampe 17
 sinusoïdale 12, 214
force électromotrice 7
 induite 23

forme

 exponentielle 104
 trigonométrique 104
formule de développement de Heavside 217
fréquence 11, 13
 de transition 262
 propre 207

G

gain
 en charge 261
 en courant β 250
 en tension 256
 en tension à vide 259
générateur(s)
 de courant en parallèle 51
 de tension 1
 de tension en parallèle 52
 de tension en série 50
 de Thévenin 162
 réel de courant 10
 réel de tension 8
grille 252

I

impédance
 caractéristique 164
 complexe 108, 112
 d'entrée 162, 165, 260
 de sortie 162, 260
 image 163
 isomorphe 219, 220
 itérative 164
impulsion de Dirac 16, 213
inductance 22, 110, 218
induction magnétique 22

J

joule 25

L

loi(s)
 d'Ohm 19
 de Kirchhoff 47
 des mailles 48
 des nœuds 47

M

mailles 46
 adjacentes 65
 indépendantes 65
matrice(s)
 admittance 155
 de transfert 157
 hybride 156
 impédance 153
méthode(s)
 de Cramer 62
 des mailles adjacentes 66
 des nœuds indépendants 69
mobilité des charges 2
module 102, 104
montage
 dérivateur 272
 émetteur commun 254
 étoile 60
 intégrateur 271
 sommateur 269
 soustracteur 270
 triangle 60
mutuelle inductance 24

N

nœuds 45
 indépendants 65

O

ohm 27

P

passivation d'une source 18
pente 252, 253
 $+n$ 170
 $-n$ 170
période 11, 13
phase
 à l'origine 13, 101
 instantanée 13, 101
point
 de fonctionnement 10, 251
 de repos 10
pôles
 de $F(p)$ 215

 simples 217
pont diviseur
 de courant 53
 de tension 53
potentiel électrique 4
premier ordre 200
pseudo-période 208
puissance 4
 active 117, 119
 complexe 122
 disponible 121
 dissipée 7
 fournie 72
 instantanée 5, 20, 116, 119, 123, 125
 moyenne 5, 117
 réactive 120, 125
pulsation 13
 caractéristique 171
 de coupure 171
 propre 207

Q

quadripôle
 électrique 152
 passif 165
 symétrique 165
 unidirectionnel 165

R

réactance 108
récepteur 1, 20
régime
 à faible amortissement 226
 amorti 225
 apériodique 173, 206, 225
 continu 5
 critique 173, 206, 228
 dynamique 6
 harmonique 12, 100, 222
 oscillatoire 174, 206, 228
 quelconque 222
 sinusoïdal 100
 statique 5
 transitoire 14, 206
 variable 6
réjection en mode commun 266

réponse
 impulsionnelle 223, 226–228
 indicielle 224–226, 228, 265
représentation
 complexe 12, 104
 de Bode 167
 de Fresnel 12, 101
 vectorielle 100
réseau électrique 44
résistance 3, 19, 109, 218
 d'entrée 252
 de sortie 166, 252
 dynamique 258
 interne 8, 10, 56
résistances
 en parallèle 50
 en série 49
retard de phase 14

S

schéma équivalent 251, 253, 255, 259, 263
second ordre 224
self induction 23
signal sinusoïdal 12
slew-rate 262
solution
 générale 200
 particulière 200
source 252
source(s)
 de tension 1
 idéale de courant 8
 idéale de tension 6
 indépendantes 17
 liées 17
structure
 de Rauch 273
 de Sallen et Key 274
superposition (théorème) 54
susceptance 108
systèmes
 monophasés 127
 triphasés 127

T

taux de réjection en mode commun 262
temps de montée 203, 265
tension
 électrique 4
 carrée 12
 composée 129
 dents de scie 12
 simple 129
 sinusoïdale 12
théorème
 de Boucherot 122
 de Kennelly 59
 de la valeur finale 211
 de la valeur initiale 211
 de Millman 57
 de Norton 56
 de réciprocité 59, 165
 de Rosen 114
 de substitution 58
 de Thévenin 55
 du retard 212
transconductance 252, 253
transformation
 de Laplace 209
 inverse 214
 triangle-étoile 59
transistor
 à effet de champ 248, 252
 bipolaire 247, 249
 FET en drain commun 258
 unipolaire 248
translation complexe 212

V

valeur
 crête 13
 efficace 14, 122
 moyenne 14
variable complexe p 209
volt 26

W

watt 25

Z

zéros de la fonction $F(p)$ 215



Tahar Neffati

ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

Analyse et synthèse des circuits

Ce cours complet d'électricité est destiné aux étudiants en IUT et en Licences.

Sont exposées les notions importantes sur les circuits électriques et sur leurs méthodes d'analyse en régime statique et en régime sinusoïdal. Sont ensuite traitées la modélisation et la caractérisation des quadripôles (filtre, ampli, régime transitoire), qui est une introduction à l'électronique.

Chaque chapitre est accompagné de nombreux exercices corrigés. Le dernier chapitre regroupe des problèmes de synthèse qui aideront l'étudiant à évaluer ses connaissances globales en électricité et à préparer ses examens avec le maximum d'efficacité.

Dans cette nouvelle édition entièrement révisée, de nouveaux exercices et problèmes ont été introduits ainsi que les résumés des principales notions à retenir.

TAHAR NEFFATI
est maître de conférences
à l'IUT de Cergy-Pontoise
et au CNAM.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

